Università degli Studi di Udine Anno Accademico 1997/98

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 4 giugno 1998

Cognome e Nome:

Matricola: Documento di identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ misurabile tale che

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(t)|}{1+t^2}\,dt < +\infty\,.$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ poniamo

$$F_n(x) := \frac{n}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{1+n^2(x-t)^2}\,dt\,.$$

a. Dimostrare che la definizione ha effettivamente senso, e che per ogni n la $x \mapsto F_n(x)$ è continua. Infine se f è costante allora $F_n \equiv f$ per ogni n.

b. Se x_0 è un punto di continuità per f allora $F_n(x_0)$ tende a $f(x_0)$ per $n \to +\infty$.
(È restrittivo supporre che $x_0 = f(x_0) = 0$? Spezzare l'integrale nella somma degli integrali per $|t| \le \delta$ e sul resto...).

c. Verificare che se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora per ogni n ha senso la formula che definisce F_n, anche $F_n \in L^1(\mathbb{R})$ e $\|F_n\|_{L^1} \le \|f\|_{L^1}$.

d. Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora $F_n \to f$ in $L^1(\mathbb{R})$ per $n \to +\infty$.
(Fare prima il caso in cui f è continua a supporto compatto, con un metodo simile al punto **b**, usando l'uniforme continuità; nel caso generale approssimare la f con funzioni continue a supporto compatto e usare il punto **c**).

2. Sia X uno spazio topologico, $C(X)$ lo spazio vettoriale delle funzioni $X \to \mathbb{R}$ continue. Sia $\Lambda\colon C(X) \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare e positivo ($f \ge 0 \Rightarrow \Lambda(f) \ge 0$). Per $V \subseteq X$ aperto poniamo

$$\mu(V) := \sup\Big\{\Lambda(f) \ : \ f \in C(X),\ 0 \le f \le \chi_V\Big\}\,,$$

e per $E \subseteq X$ poniamo

$$\mu^*(E) := \inf\big\{\mu(V) \ : \ E \subseteq V,\ V \text{ aperto}\big\}\,.$$

Siano $V_1, V_2 \subseteq X$ due *aperti disgiunti* e siano $E_1 \subseteq V_1$, $E_2 \subseteq V_2$. Dimostrare che

$$\mu(V_1) \cup \mu(V_2) = \mu(V_1 \cup V_2) \quad \text{e} \quad \mu^*(E_1 \cup E_2) = \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2)\,.$$

(Notare che non ci sono ipotesi di misurabilità in alcun senso su E_1, E_2, o di compattezza locale su X).

Punti: 10+10+10+10, 10

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1997/98

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

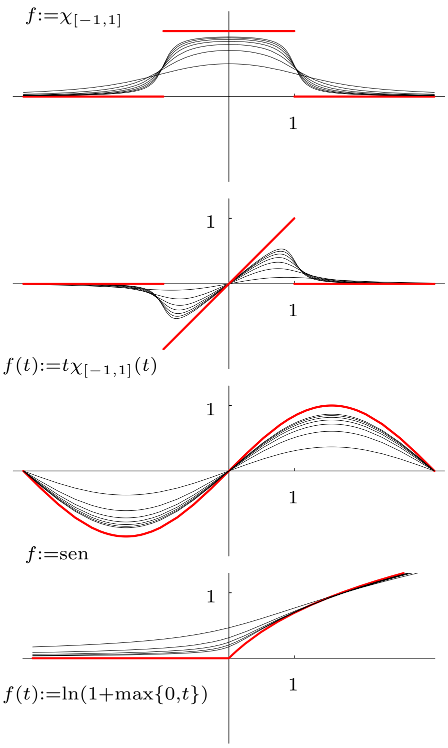
Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 4 giugno 1998

Svolgimento

1. Sono poche le f per le quali gli integrali che definiscono F_n si calcolano raramente per via elementare. Più casi si possono trattare usando funzioni speciali e i programmi di calcolo simbolico, facendo attenzione che talvolta i risultati coinvolgono funzioni complesse a più valori, e al momento di tradurre le formule in numeri il calcolatore può scegliere il valore sbagliato (mi è successo quanto ho provato con $f(t) := \ln(1+t^2)$). La figura accanto mostra i grafici di f (in rosso) e delle prime $F_1, F_2, \ldots$ (in nero, sperando che siano giuste) per le seguenti f:

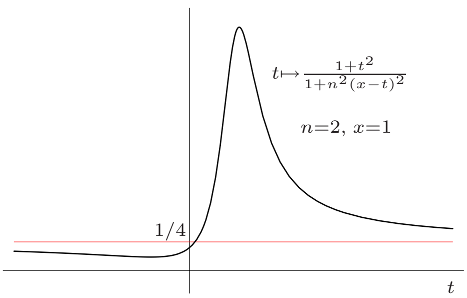
$$f := \chi_{[-1,1]}\,, \qquad f(t) := t\chi_{[-1,1]}(t)\,,$$
$$f := \operatorname{sen}\,, \qquad f(t) := \ln(1+\max\{0,t\})\,.$$



Solo le prime due f sono in $L^1(\mathbb{R})$. È curioso che quando $f = \operatorname{sen}$ il calcolatore restituisce $F_n = e^{1-1/n} f$, cioè il seno sarebbe un autovettore della trasformazione che manda f in F_n. Che si possa dimostrare elementarmente? Le F_n sembrano comunque continue, anche quando f è discontinua, e i grafici si avvicinano a quello di f al crescere di n. Nell'esercizio preciseremo proprio queste impressioni.

a. Vediamo che la funzione integranda è in effetti in $L^1(\mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(t)}{1+n^2(x-t)^2} \right| dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(t)|}{1+n^2(x-t)^2}\, dt =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(t)|}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{1+n^2(x-t)^2}\, dt\,.$$



Ora la funzione

$$t \mapsto \frac{1+t^2}{1+n^2(x-t)^2}$$

essendo continua su $\mathbb{R}$ e tendendo al valore finito $1/n^2$ per $t \to \pm\infty$, è necessariamente limitata da una costante $c(n,x)$. Quindi possiamo maggiorare

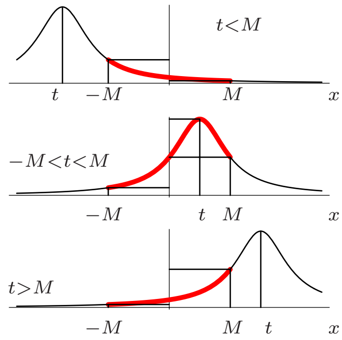
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(t)|}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{1+n^2(x-t)^2}\, dt \le c(n,x) \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(t)|}{1+t^2}\, dt < +\infty\,.$$

Per dimostrare la continuità di F_n, essendo la funzione integranda continua rispetto a x, proviamo ad applicare il teorema della convergenza dominata e cerchiamo di maggiorare il valore assoluto della funzione uniformemente in x. Non si può fare per x che varia su tutto $\mathbb{R}$ perché

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{f(t)}{1+n^2(x-t)^2} \right| = \frac{|f(t)|}{1+0} = |f(t)|\,,$$

che nelle nostre ipotesi non è necessariamente in $L^1(\mathbb{R})$ come funzione di t. Proviamo a far variare x su $[-M, M]$:

$$\sup_{|x|\le M}\left|\frac{f(t)}{1+n^2(x-t)^2}\right| = \sup_{|x|\le M}\left(\frac{|f(t)|}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{1+n^2(x-t)^2}\right) = \frac{|f(t)|}{1+t^2}\cdot\sup_{|x|\le M}\frac{1+t^2}{1+n^2(x-t)^2}\,.$$



La funzione di una variabile

$$x \mapsto \frac{1}{1+n^2(x-t)^2}$$

è positiva, ed è crescente su $]-\infty, t]$ e decrescente su $[t, +\infty[$. Quindi

$$\sup_{|x|\le M}\left|\frac{1+t^2}{1+n^2(x-t)^2}\right| = \begin{cases} \dfrac{1+t^2}{1+n^2(M-t)^2} & \text{se } t \ge M,\\ 1+t^2 & \text{se } |t| \le M,\\ \dfrac{1+t^2}{1+n^2(-M-t)^2} & \text{se } t \le -M. \end{cases}$$

Questo estremo superiore, come funzione di t, è limitato da una costante $c_1(M, n)$ su $\mathbb{R}$ perché continuo e con limite finito per $t \to \pm\infty$. Pertanto

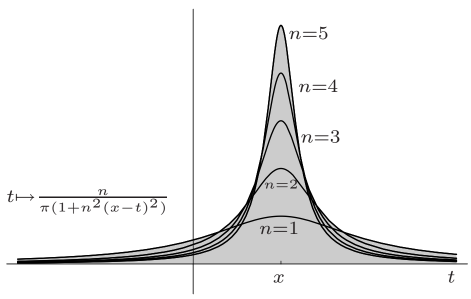
$$\sup_{|x|\le M}\left|\frac{f(t)}{1+n^2(x-t)^2}\right| \le c_1(M,n)\frac{|f(t)|}{1+t^2}\,,$$

e quest'ultima è in $L^1(\mathbb{R})$ come funzione di t per ipotesi su f. Il teorema della convergenza dominata si può applicare e la funzione $x \mapsto F_n(x)$ è continua per ogni n. Con dei conti un poco più complicati si dimostra che è anche di classe $C^1(\mathbb{R})$.
Sia ora $f(t) \equiv c$ costante. È chiaro che allora $t \mapsto c/(1+t^2)$ è in $L^1(\mathbb{R})$. La F_n si calcola esplicitamente in termini di funzioni elementari col cambio di variabile $y = n(x-t)$, per il quale $dt = -dy/n$:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{n}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c}{1+n^2(x-t)^2}\,dt = \frac{nc}{\pi}\int_{+\infty}^{-\infty}\frac{1}{1+y^2}\frac{-dy}{n} = \frac{c}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{c}{\pi}\big[\arctan y\big]_{-\infty}^{+\infty} = \\ &= \frac{c}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = c = f(x)\,. \end{aligned}$$

b. Per calcolare il limite di $F_n(x)$ per $n \to +\infty$ non si possono applicare i teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Per esempio nel caso di $f(t) := 1$ costante e x fisso, la successione di funzioni integrande

$$t \mapsto \frac{n}{\pi(1+n^2(x-t)^2)}$$



non è monotona in n, in quanto si alza vicino al punto x e si abbassa lontano da x. L'estremo superiore su n della successione di funzioni non è agevole da calcolare esplicitamente, ma possiamo dimostrare che comunque non può essere in $L^1(\mathbb{R})$ perché se lo fosse potremmo passare al limite sotto il segno di integrale, mentre non si può: mentre la successione di funzioni tende puntualmente alla funzione quasi ovunque nulla, gli integrali sono costantemente uguali a 1:

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\pi(1+n^2(x-t)^2)}\right)dt = \int_{\mathbb{R}}(+\infty)\chi_{\{0\}}(t)\,dt = 0 \ne \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}\frac{n}{\pi(1+n^2(x-t)^2)}\,dt = 1\,.$$

Bisogna usare un altro metodo. Facciamo per cominciare il caso $x_0 = f(x_0) = 0$, supponendo che f sia continua in 0. Vogliamo dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(0) = f(0) = 0\,.$$

Sia $\varepsilon > 0$ fissato e sia $\delta > 0$ tale che $|t| < \delta \Rightarrow |f(t)| < \varepsilon$. Spezziamo l'integrale nel modo seguente

$$\big|F_n(0)\big| = \frac{n}{\pi}\Big|\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{1+n^2t^2}\,dt\Big| \le \frac{n}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(t)|}{1+n^2t^2}\,dt = \frac{n}{\pi}\int_{]-\delta,\delta[} \frac{|f(t)|}{1+n^2t^2}\,dt + \frac{n}{\pi}\int_{\mathbb{R}\setminus]-\delta,\delta[} \frac{|f(t)|}{1+n^2t^2}\,dt\,.$$

Il primo integrale si stima con la continuità di f in 0, indipendentemente da n:

$$\frac{n}{\pi}\int_{]-\delta,\delta[} \frac{|f(t)|}{1+n^2t^2}\,dt \le \frac{n}{\pi}\int_{]-\delta,\delta[} \frac{\varepsilon}{1+n^2t^2}\,dt \le \frac{n}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon}{1+n^2t^2}\,dt = \frac{n}{\pi}\cdot\varepsilon\cdot\frac{\pi}{n} = \varepsilon\,.$$

Il secondo con la convergenza dominata: si ha convergenza puntuale

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(t)}{1+n^2t^2} = 0 \qquad \text{per } t \ne 0\,,$$

che si può stimare come segue, dato che $|t| \ge \delta$:

$$\frac{n}{\pi}\Big|\frac{f(t)}{1+n^2t^2}\Big| = \frac{|f(t)|}{1+t^2}\cdot\frac{n(1+t^2)}{\pi(1+n^2t^2)} \le \frac{|f(t)|}{1+t^2}\frac{n(1+\frac{1}{t^2})}{\pi(\frac{1}{t^2}+n^2)} \le \frac{|f(t)|}{1+t^2}\frac{n(1+\frac{1}{\delta^2})}{\pi n^2} \le \frac{|f(t)|}{1+t^2}\cdot\frac{\delta^2+1}{\pi\delta^2} \quad \forall n \ge 1\,,$$

e quest'ultima funzione non dipende da n ed è in $L^1(\mathbb{R})$ per ipotesi. Possiamo passare al limite sotto il segno di integrale:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\pi}\int_{\mathbb{R}\setminus]-\delta,\delta[} \frac{|f(t)|}{1+n^2t^2}\,dt = \int_{\mathbb{R}\setminus]-\delta,\delta[} \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\pi}\frac{|f(t)|}{1+n^2t^2}\,dt = 0\,.$$

Quindi per n abbastanza grande

$$\big|F_n(0)\big| \le \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\,,$$

e la convergenza è dimostrata nel caso particolare $x_0 = f(x_0) = 0$.
Nel caso generale supponiamo f continua in x_0 e poniamo $\tilde f(y) := f(y+x_0) - f(x_0)$. Col cambio di variabile $t = y + x_0$ si vede che anche $\tilde f$ verifica le ipotesi:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde f(y)|}{1+t^2}\,dt &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\big|f(y+x_0)-f(x_0)\big|}{1+y^2}\,dt \le \int_{\mathbb{R}} \frac{\big|f(y+x_0)\big|}{1+y^2}\,dy + \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x_0)|}{1+y^2}\,dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(t)|}{1+(t-x_0)^2}\,dt + \pi|f(x_0)| = \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(t)|}{1+t^2}\underbrace{\Big(\frac{1+t^2}{1+(t-x_0)^2}\Big)}_{\text{limitato in } t}\,dt + \pi|f(x_0)| < +\infty\,.\end{aligned}$$

Sia $\tilde F_n$ la funzione associata a $\tilde f$. Allora

$$\begin{aligned}\tilde F_n(0) &= \frac{n}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\tilde f(y)}{1+n^2(0-y)^2}\,dt = \frac{n}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(y+x_0)-f(x_0)}{1+n^2y^2}\,dt = \\ &= \frac{n}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(y+x_0)}{1+n^2y^2}\,dt - \frac{n}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x_0)}{1+n^2t^2}\,dt = \\ &= \frac{n}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{1+n^2(t-x_0)^2}\,dt - f(x_0) = \frac{n}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{1+n^2(x_0-t)^2}\,dt - f(x_0) = \\ &= F_n(x_0) - f(x_0)\,.\end{aligned}$$

Poiché $\tilde f(0) = f(0+x_0) - f(x_0) = 0$ e $\tilde f$ è continua in 0 per quanto abbiamo dimostrato $\tilde F_n(0) \to 0$, per cui $F_n(x_0) \to f(x_0)$.

c. Supponiamo che $f \in L^1(\mathbb{R})$. Allora

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(t)|}{1+t^2}\,dt \le \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dt < +\infty\,,$$

per cui ha senso calcolare F_n, che è continua, quindi misurabile. Calcoliamone la norma in $L^1(\mathbb{R})$:

$$\|F_n\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \big|F_n(x)\big|\,dx = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{n}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{1+n^2(x-t)^2}\,dt\right| dx \le \frac{n}{\pi}\int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(t)|}{1+n^2(x-t)^2}\,dt\,.$$

La funzione di due variabili $\varphi_1(x,t) := |f(t)|$ è misurabile rispetto alla σ-algebra prodotto $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_1$ perché se $V \subseteq \mathbb{R}$ è aperto allora $\varphi_1^{-1}(V) = \mathbb{R} \times f^{-1}(V)$ è un rettangolo misurabile in $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_1$. La funzione di due variabili $\varphi(x,t) := 1/(1+n^2(x-t)^2)$ è misurabile rispetto alla σ-algebra prodotto perché continua, quindi boreliana. Di conseguenza anche la funzione $(x,t) \mapsto |f(t)|/(1+n^2(x-t)^2)$ è misurabile e positiva e per il teorema di Fubini-Tonelli possiamo cambiare l'ordine di integrazione, e poi fare il cambio di variabili $y = n(x-t)$ nell'integrale rispetto a x:

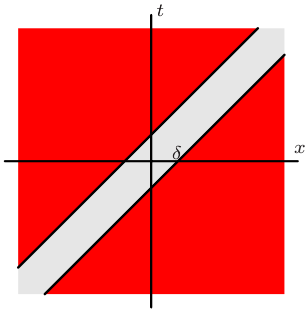
$$\begin{aligned}\|F_n\|_{L^1(\mathbb{R})} &\le \frac{n}{\pi}\int_{\mathbb{R}} dt \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(t)|}{1+n^2(x-t)^2}\,dx = \frac{n}{\pi}\int_{\mathbb{R}} dt\,|f(t)| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+n^2(x-t)^2}\,dx = \\ &= \frac{n}{\pi}\int_{\mathbb{R}} dt\,|f(t)| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+y^2}\cdot\frac{dy}{n} = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} dt\,|f(t)| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} dt\,|f(t)|\cdot\pi = \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dt = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}\,.\end{aligned}$$

Se togliamo i valori assoluti nei conti precedenti ricaviamo anche che

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} F_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt \quad \forall n \ge 1\,.$$

d. Supponiamo per cominciare che f sia continua a supporto compatto. In particolare esiste $M > 0$ tale che $|t| > M \Rightarrow f(t) = 0$. Sappiamo che la f è anche uniformemente continua. Fissato $\varepsilon > 0$. Esiste un $\delta > 0$ tale che $|t-x| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon$. Allora

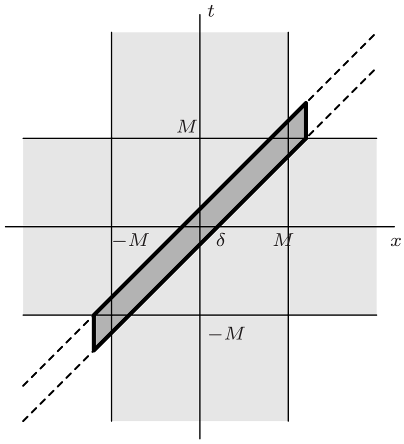
$$\begin{aligned}\big\|F_n - f\big\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{n}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{1+n^2(x-t)^2}\,dt - f(x)\right| dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{n}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{1+n^2(x-t)^2}\,dt - \frac{n}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{1+n^2(x-t)^2}\,dt\right| dx = \\ &= \frac{n}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \left|\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)-f(x)}{1+n^2(x-t)^2}dt\right| dx \le \\ &\le \frac{n}{\pi}\int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} \frac{\big|f(t)-f(x)\big|}{1+n^2(x-t)^2}\,dt\,.\end{aligned}$$



Come nel punto **c** possiamo scrivere l'integrale iterato come integrale su $\mathbb{R}^2$, che spezziamo in due regioni, una (in grigio in figura) in cui la differenza $f(t)-f(x)$ è piccola indipendentemente da n, l'altra (in rosso) in cui $n^2(x-t)^2$ è grande se n è grande:

$$\begin{aligned}\big\|F_n - f\big\|_{L^1(\mathbb{R})} &\le \frac{n}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\big|f(t)-f(x)\big|}{1+n^2(x-t)^2}\,dt\,dx = \\ &= \frac{n}{\pi}\int_{\{(x,t)\in\mathbb{R}^2\,:\,|t-x|<\delta\}} \frac{\big|f(t)-f(x)\big|}{1+n^2(x-t)^2}\,dt\,dx + \\ &\quad + \frac{n}{\pi}\int_{\{(x,t)\in\mathbb{R}^2\,:\,|t-x|\ge\delta\}} \frac{\big|f(t)-f(x)\big|}{1+n^2(x-t)^2}\,dt\,dx\,.\end{aligned}$$

Poiché f ha supporto in $[-M, M]$, la funzione $(x,t) \mapsto f(t) - f(x)$ è nulla fuori dall'insieme $\{|x| \le M \text{ o } |t| \le M\}$ (in grigio chiaro in figura), che interseca la striscia $\{|x-t| \le \delta\}$ in una regione limitata del piano. Infatti $|x| \le M \Rightarrow |t| \le |t-x| + |x| < \delta + M$ e $|t| \le M \Rightarrow |x| \le |x-t| + |t| < \delta + M$. Il primo integrale si può pertanto restringere a un insieme limitato contenente l'intersezione, per esempio $\{|x| \le M + \delta,\ |t-x| < \delta\}$ (in grigio scuro), su cui per di più $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ per l'uniforme continuità:



$$
\begin{aligned}
&\frac{n}{\pi} \int_{\{(x,t)\in\mathbb{R}^2\,:\,|t-x|<\delta\}} \frac{\big|f(t)-f(x)\big|}{1+n^2(x-t)^2}\,dt\,dx = \\
&= \frac{n}{\pi} \int_{\{(x,t)\in\mathbb{R}^2\,:\,|t-x|<\delta,\ |x|\le M+\delta\}} \frac{\big|f(t)-f(x)\big|}{1+n^2(x-t)^2}\,dt\,dx \le \\
&\le \frac{n}{\pi} \int_{\{(x,t)\in\mathbb{R}^2\,:\,|t-x|<\delta,\ |x|\le M+\delta\}} \frac{\varepsilon}{1+n^2(x-t)^2}\,dt\,dx = \\
&= \frac{n\varepsilon}{\pi} \int_{[-M-\delta, M+\delta]} dx \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{1}{1+n^2(x-t)^2}\,dt \le \\
&\le \frac{n\varepsilon}{\pi} \int_{[-M-\delta, M+\delta]} dx \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+n^2(x-t)^2}\,dt = \frac{n\varepsilon}{\pi} \int_{[-M-\delta, M+\delta]} dx \frac{\pi}{n} = \varepsilon(2M+2\delta)\,.
\end{aligned}
$$

L'altro integrale si stima spezzando l'insieme su cui si integra:

$$
\begin{aligned}
&\frac{n}{\pi} \int_{\{(x,t)\in\mathbb{R}^2\,:\,|t-x|\ge\delta\}} \frac{\big|f(t)-f(x)\big|}{1+n^2(x-t)^2}\,dt\,dx = \frac{n}{\pi} \int_{\{|t-x|\ge\delta\}\cap\big(\{|x|\le M\}\cup\{|y|\le M\}\big)} \frac{\big|f(t)-f(x)\big|}{1+n^2(x-t)^2}\,dt\,dx \le \\
&\le \frac{n}{\pi} \int_{\{|t-x|\ge\delta\}\cap(\{|x|\le M\}\cup\{|y|\le M\})} \frac{2\sup|f|}{1+n^2(x-t)^2}\,dt\,dx \le \\
&\le \frac{n}{\pi} \int_{\{|t-x|\ge\delta\}\cap\{|x|\le M\}} \frac{2\sup|f|}{1+n^2(x-t)^2}\,dt\,dx + \frac{n}{\pi} \int_{\{|t-x|\ge\delta\}\cap\{|y|\le M\}} \frac{2\sup|f|}{1+n^2(x-t)^2}\,dt\,dx = \\
&= \frac{4n\sup|f|}{\pi} \int_{\{|t-x|\ge\delta\}\cap\{|x|\le M\}} \frac{1}{1+n^2(x-t)^2}\,dt\,dx\,,
\end{aligned}
$$

dove l'ultima uguaglianza si deve al fatto che i due integrali precedenti si ottengono uno dall'altro scambiando x con t (che è una trasformazione lineare che conserva la misura di Lebesgue). Infine l'ultimo integrale si calcola esplicitamente:

$$
\begin{aligned}
\frac{4n\sup|f|}{\pi} \int_{\{|t-x|\ge\delta\}\cap\{|x|\le M\}} \frac{1}{1+n^2(x-t)^2}\,dt\,dx &= \frac{4n\sup|f|}{\pi} \int_{-M}^{M} dx \int_{\mathbb{R}\setminus[x-\delta,x+\delta]} \frac{1}{1+n^2(x-t)^2}\,dt = \\
&= \frac{4n\sup|f|}{\pi} \int_{-M}^{M} dx \int_{\mathbb{R}\setminus[-n\delta,n\delta]} \frac{1}{1+y^2}\,dy = \\
&= \frac{4n\sup|f|}{\pi} \int_{-M}^{M} dx \frac{\pi - 2\arctan(n\delta)}{n} = 8M\big(\pi - 2\arctan(n\delta)\big)\sup|f|\,.
\end{aligned}
$$

L'ultima espressione è infinitesima per $n \to +\infty$ perché $\delta > 0$. Si poteva anche procedere con la convergenza dominata:

$$
\frac{4n\sup|f|}{\pi} \int_{\{|t-x|\ge\delta\}\cap\{|x|\le M\}} \frac{1}{1+n^2(x-t)^2}\,dt\,dx = \frac{4\sup|f|}{\pi} \int_{\{|t-x|\ge\delta,\ |x|\le M\}} \frac{n}{1+n^2(x-t)^2}\,dt\,dx\,.
$$

La successione di funzioni $n/(1+n^2(x-t)^2)$ tende puntualmente a 0 sull'insieme di integrazione, e si può stimare indipendentemente da n:

$$
\sup_{n\ge1} \left|\frac{n}{1+n^2(x-t)^2}\right| = \sup_{n\ge1} \frac{1}{\frac{1}{n} + n(x-t)^2} \le \frac{1}{(x-t)^2}\,.
$$

La funzione $(x,t) \mapsto 1/(x-t)^2$ è integrabile sull'insieme che ci interessa, ancora perché $\delta > 0$:

$$\int_{\{|t-x|\geq\delta,\ |x|\leq M\}} \frac{1}{(x-t)^2} = \int_{-M}^{M} dx \int_{\mathbb{R}\setminus[x-\delta,x+\delta]} \frac{1}{(x-t)^2} dt = \int_{-M}^{M} dx \int_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]} \frac{1}{y^2}\, dy =$$
$$= 2M \int_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]} \frac{1}{y^2}\, dy < +\infty\,.$$

Per il teorema della convergenza dominata

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\{|t-x|\geq\delta,\ |x|\leq M\}} \frac{n}{1+n^2(x-t)^2}\, dt\, dx = \int_{\{|t-x|\geq\delta,\ |x|\leq M\}} \Big(\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{1+n^2(x-t)^2}\Big)\, dt\, dx = 0\,.$$

Abbiamo dunque dimostrato che $F_n \to f$ in $L^1(\mathbb{R})$ quando f è continua a supporto compatto. Mettiamoci ora nel caso generale di $f \in L^1(\mathbb{R})$. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per la densità dell'insieme delle funzioni continue a supporto compatto in $L^1(\mathbb{R})$ (conseguenza del teorema di Lusin), esiste una g continua a supporto compatto tale che $\|f-g\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \varepsilon$. Sia G_n la funzione associata a g. La funzione $F_n - G_n$ è quella associata a $f-g$, perché l'operazione è lineare. Allora, per le disuguaglianza del punto **c**, $\|F_n - G_n\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f-g\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \varepsilon$ e

$$\|F_n - f\|_{L^1} \leq \|F_n - G_n\|_{L^1} + \|G_n - g\|_{L^1} + \|g-f\|_{L^1} \leq \|f-g\|_{L^1} + \|G_n - g\|_{L^1} + \varepsilon \leq$$
$$\leq \varepsilon + \|G_n - g\|_{L^1} + \varepsilon = 2\varepsilon + \|G_n - g\|_{L^1} \quad \text{per ogni } n.$$

Per quanto già dimostrato $G_n \to g$ in $L^1(\mathbb{R})$. Quindi

$$\|F_n - f\|_{L^1} \leq 3\varepsilon \qquad \text{per ogni } n \text{ abbastanza grande,}$$

che fa concludere che $F_n \to f$ in $L^1(\mathbb{R})$ come voluto.

2. Siano $V \subseteq X$ e $f \in C(X)$ tali che $0 \leq f \leq \chi_V$. Allora in particolare che $f \geq 0$, da cui $\Lambda(f) \geq 0$, perché Λ è positiva. Inoltre l'insieme $\{f \in C(X)\ :\ 0 \leq f \leq V\}$ non è vuoto, contenendo la funzione identicamente nulla. Quindi tutti gli insiemi del tipo

$$\big\{\Lambda(f)\ :\ f \in C(X),\ 0 \leq f \leq \chi_V\big\} \quad \text{e} \quad \big\{\mu(V)\ :\ V \text{ aperto},\ E \subseteq V\big\}$$

sono sottinsiemi non vuoti di $[0,+\infty]$. Useremo più avanti il fatto che

$$A, B \subseteq [0,+\infty] \quad \Rightarrow \quad \inf(A+B) = \inf A + \inf B \text{ e } \sup(A+B) = \sup A + \sup B\,.$$

Vediamo ora che μ è monotona sugli aperti, cioè supponiamo che $V \subseteq W \subseteq X$ siano aperti, e dimostriamo che allora $\mu(V) \leq \mu(W)$. Infatti $\chi_V \leq \chi_W$, per cui

$$\forall f \in C(X) \qquad 0 \leq f \leq \chi_V \quad \Rightarrow \quad 0 \leq f \leq \chi_W\,,$$

e di seguito

$$\big\{f \in C(X)\ :\ 0 \leq f \leq \chi_V\big\} \subseteq \big\{f \in C(X)\ :\ 0 \leq f \leq \chi_W\big\} \quad \text{e}$$
$$\mu(V) = \sup\big\{\Lambda(f)\ :\ f \in C(X),\ 0 \leq f \leq \chi_V\big\} \leq \sup\big\{\Lambda(f)\ :\ f \in C(X),\ 0 \leq f \leq \chi_W\big\} = \mu(W)\,.$$

Sia ora $V \subseteq X$ un qualsiasi aperto contenente E_1. Allora anche $V_1 \cap V$ è un aperto contenente E_1 e

$$\mu(V_1 \cap V) \leq \mu(V)\,.$$

Ne segue che gli insiemi

$$\big\{\mu(V)\ :\ V \text{ aperto},\ E_1 \subset V\big\} \quad \text{e} \quad \big\{\mu(V)\ :\ V \text{ aperto},\ E_1 \subset V \subseteq V_1\big\}$$

hanno lo stesso estremo inferiore. Insomma

$$\mu^*(E_1) = \inf\bigl\{\mu(V) \ : \ V \text{ aperto, } E_1 \subset V \subseteq V_1\bigr\}\,.$$

Analogamente per E_2 e per $E_1 \cup E_2$:

$$\begin{aligned}\mu^*(E_2) &= \inf\bigl\{\mu(V) \ : \ V \text{ aperto, } E_2 \subset V \subseteq V_2\bigr\}\,,\\ \mu^*(E_1 \cup E_2) &= \inf\bigl\{\mu(V) \ : \ V \text{ aperto, } E_1 \cup E_2 \subset V \subset V_1 \cup V_2\bigr\}\,.\end{aligned}$$

Siano ora V, W aperti tali che $E_1 \subseteq V \subseteq V_1$, $E_2 \subseteq V \subseteq V_2$, e $f_1, f_2 \in C(X)$ tali che $0 \le f_1 \le \chi_V$, $0 \le f_2 \le \chi_W$. Allora è chiaro che $f_1 + f_2 \in C(X)$ e $0 \le f_1 + f_2 \le \chi_V + \chi_W = \chi_{V \cup W}$, essendo V, W disgiunti, per cui

$$\bigl\{f_1 + f_2 \ : \ f_1, f_2 \in C(X),\ 0 \le f_1 \le \chi_V\,,\ 0 \le f_2 \le \chi_W\bigr\} \subseteq \bigl\{f \ : \ f \in C(X),\ 0 \le f \le \chi_{V \cup W}\bigr\}\,.$$

Viceversa, sia $f \in C(X)$ tale che $0 \le f \le \chi_{V \cup W}$. Visto che V_1 e V_2 sono *aperti disgiunti* e che f è nulla fuori da $V_1 \cup V_2$, le funzioni $\chi_{V_1} f$ e $\chi_{V_2} f$ sono continue, la loro somma è f, e $0 \le \chi_{V_1} f \le \chi_V$, $0 \le \chi_{V_2} f \le \chi_W$. Vale allora l'inclusione inversa:

$$\bigl\{f \ : \ f \in C(X),\ 0 \le f \le \chi_{U \cup W}\bigr\} \subseteq \bigl\{f_1 + f_2 \ : \ f_1, f_2 \in C(X),\ 0 \le f_1 \le \chi_V\,,\ 0 \le f_2 \le \chi_W\bigr\}\,.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}\mu(V) + \mu(W) &= \sup\bigl\{\Lambda(f_1) \ : \ f_1 \in C(X),\ 0 \le f_1 \le \chi_V\bigr\} + \sup\bigl\{\Lambda(f_2) \ : \ f_2 \in C(X),\ 0 \le f_2 \le \chi_W\bigr\} =\\ &= \sup\bigl\{\Lambda(f_1 + f_2) \ : \ f_1, f_2 \in C(X),\ 0 \le f_1 \le \chi_V\,,\ 0 \le f_2 \le \chi_W\bigr\} =\\ &= \sup\bigl\{\Lambda(f) \ : \ f \in C(X),\ 0 \le f \le \chi_{V \cup W}\bigr\} =\\ &= \mu(V \cup W)\,,\end{aligned}$$

e quindi infine

$$\begin{aligned}\mu^*(E_1) + \mu^*(E_2) &= \inf\bigl\{\mu(V)\ ;\ V \text{ aperto, } E_1 \subseteq V \subseteq V_1\bigr\} + \inf\bigl\{\mu(W)\ ;\ W \text{ aperto, } E_2 \subseteq W \subseteq V_2\bigr\} =\\ &= \inf\bigl\{\mu(V) + \mu(W) \ : \ V, W \text{ aperti, } E_1 \subseteq V \subseteq V_1,\ E_2 \subseteq W \subseteq V_2\bigr\} =\\ &= \inf\bigl\{\mu(V \cup W) \ : \ V, W \text{ aperti, } E_1 \subseteq V \subseteq V_1,\ E_2 \subseteq W \subseteq V_2\bigr\} =\\ &= \inf\bigl\{\mu(U) \ : \ U \text{ aperto, } E_1 \cup E_2 \subseteq U \subseteq V_1 \cup V_2\bigr\} =\\ &= \mu^*(E_1 \cup E_2)\,.\end{aligned}$$