Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 1996/97

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

# Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 18 febbraio 1998

Cognome e Nome:

Matricola: Documento di identità (se chiesto):

Chi porta quest'unico modulo ha 90 minuti di tempo e deve ritenersi a punteggio pieno con 15 punti. Chi porta due moduli ha tempo tre ore complessive e ha punteggio pieno con 30 punti, anche se presi tutti da uno solo dei due compiti.

**1. a.** Siano $1 \le p, q \le +\infty$ esponenti coniugati ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) e $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in L^q(\mathbb{R}^n)$ due funzioni reali. Dimostrare che la funzione

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\psi(x+y)\,dy$$

è ben definita e continua da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$.

(Cominciare con $\psi$ continua a supporto compatto. Nel caso generale usare il fatto che le funzioni continue a supporto compatto sono dense in $L^q(\mathbb{R}^n)$ se $q < +\infty$. Se $q = +\infty$ fare un cambio di variabili e invertire le parti fra $\phi$ e $\psi$).

**b.** Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile e integrabile secondo Lebesgue su ogni misurabile limitato. Sia $D$ un misurabile limitato, e indichiamo con $x + D$ il traslato di $D$ secondo il vettore $x$. Dimostrare che la funzione

$$x \mapsto \int_{x+D} f(y)\,dy$$

è continua da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$.

(Introducendo $\chi_{x+D}$ e col cambio di variabile $z = y - x$ ci si riporta circa al caso precedente...).

**2.** Sia $H$ uno spazio di Hilbert, $\{e_\alpha \ : \ \alpha \in A\}$ un sistema ortonormale completo, $y_n$ una successione limitata in $H$. Supponiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} (y_n \mid e_\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in A\,.$$

Dimostrare che allora $(x \mid y_n) \to 0$ per ogni $x \in H$. Cosa succede se $y_n$ non è limitata? (approssimare $x$ con una combinazione lineare finita di elementi della base hilbertiana).

*Punti: 8+4, 8*

Università degli Studi di Udine Anno Accademico 1996/97

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

# Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 18 febbraio 1998

Svolgimento

**1. a.** Notazioni: $B(x,r[$ è la palla aperta in $\mathbb{R}^n$ di centro $x$ e raggio $r \geq 0$. Siano $1 \leq p,q \leq +\infty$ esponenti coniugati ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$) e $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in L^q(\mathbb{R}^n)$ due funzioni reali. Allora per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ fissato la funzione

$$y \mapsto \varphi(y)\psi(x+y)$$

è misurabile perché prodotto della funzione misurabile $y \mapsto \varphi(y)$ con la funzione $y \mapsto \psi(x+y)$, che è misurabile in quanto composizione della traslazione $y \mapsto x+y$ con la funzione misurabile $\psi$ (la controimmagine di misurabili tramite traslazioni è misurabile; non basta sapere che la traslazione è boreliana, a meno che $\psi$ non sia pure lei boreliana). Inoltre $y \mapsto \varphi(y)\psi(x+y)$ è in $L^1(\mathbb{R})$ perché possiamo applicare la disuguaglianza di Hölder e l'invarianza della misura di Lebesgue per traslazioni: se $1 < p,q < +\infty$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \bigl|\varphi(y)\psi(x+y)\bigr|\,dy &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \bigl|\varphi(y)\bigr|^p dy\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \bigl|\psi(\underbrace{x+y}_{=:z})\bigr|^q dy\right)^{1/q} = \\ &= \|\varphi\|_p \left(\int_{\mathbb{R}^n} \bigl|\psi(z)\bigr|^q dz\right)^{1/q} = \|\varphi\|_p \|\psi\|_q < +\infty\,,\end{aligned}$$

mentre se $q = +\infty$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \bigl|\varphi(y)\psi(x+y)\bigr|\,dy &\leq \Bigl(\operatorname*{sup\,ess}_{y\in\mathbb{R}^n} \bigl|\psi(x+y)\bigr|\Bigr) \int_{\mathbb{R}^n} \bigl|\varphi(y)\bigr|\,dy = \\ &= \Bigl(\operatorname*{sup\,ess}_{z\in\mathbb{R}^n} \bigl|\psi(z)\bigr|\Bigr) \|\varphi\|_1 = \|\psi\|_\infty \|\varphi\|_1 = \|\varphi\|_p \|\psi\|_q < +\infty\,,\end{aligned}$$

e se $p = +\infty$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \bigl|\varphi(y)\psi(x+y)\bigr|\,dy \leq \Bigl(\operatorname*{sup\,ess}_{\mathbb{R}^n} |\varphi|\Bigr) \int_{\mathbb{R}^n} \bigl|\psi(x+y)\bigr|\,dy = \|\varphi\|_\infty \|\psi\|_1 = \|\varphi\|_p \|\psi\|_q < +\infty\,.$$

Vogliamo studiare la continuità dell'integrale in dipendenza dal parametro $x$:

$$u(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\psi(x+y)\,dy\,.$$

Sia $x_k$ sia una successione di punti di $\mathbb{R}^n$ convergente a $\bar{x}$. I teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale non ci possono dire niente perché non c'è nessun motivo per cui esista il limite puntuale

$$\lim_{k\to+\infty} \varphi(y)\psi(x_k+y)\,.$$

Cominciamo col supporre che $\psi$ sia continua e a supporto compatto. In questo caso il limite puntuale delle funzioni integrande esiste, e abbiamo qualche speranza di poter scambiare integrale e limite:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty} u(x_k) &= \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\psi(x_k+y)\,dy \overset{?}{=} \\ &\overset{?}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \Bigl(\lim_{k\to+\infty} \varphi(y)\psi(x_k+y)\Bigr)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\psi(\bar{x}+y)\,dy = \\ &= u(\bar{x})\,.\end{aligned}$$

Proviamo a maggiorare le funzioni integrande uniformemente in $k$. Sia $r_1 > 0$ tale che la palla $B(0, r_1]$ contenga il supporto di $\psi$, ed $r_2 > 0$ sia tale che $\|x_k\| \le r_2$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Sia poi $R = r_1 + r_2$. Allora

$$\begin{aligned} \|y\| > R \quad &\Rightarrow \quad \|x_k + y\| \ge \|y\| - \|x_k\| > (r_1 + r_2) - r_2 = r_1 \quad \Rightarrow \quad x_k + y \notin \operatorname{supp} \psi \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad \psi(x_k + y) = 0 \,. \end{aligned}$$

Dunque

$$\big|\varphi(y)\psi(x_k + y)\big| = \big|\varphi(y)\psi(x_k + y)\big|\chi_{B(0,R]}(y) \le \big|\varphi(y)\big|\Big(\max_{\mathbb{R}^n} |\psi|\Big)\chi_{B(0,R]}(y)\,.$$

La funzione all'ultimo membro non dipende da $k$ ed è in $L^1(\mathbb{R}^n)$ per la disuguaglianza di Hölder:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\varphi(y)\Big(\max_{\mathbb{R}^n} |\psi|\Big)\chi_{B(0,R]}(y)\right| dy &\le \Big(\max_{\mathbb{R}^n} |\psi|\Big)\|\varphi\|_p \cdot \big\|\chi_{B(0,R]}\big\|_q = \\ &= \begin{cases} \|\varphi\|_p \cdot \lambda\big(B(0,R]\big)^{1/q} \max_{\mathbb{R}^n} |\psi| < +\infty & \text{se } q < +\infty, \\ \|\varphi\|_1 \cdot \max_{\mathbb{R}^n} |\psi| < +\infty & \text{se } q = +\infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Torniamo al caso generale in cui $\psi \in L^q(\mathbb{R}^n)$ e supponiamo per ora che $q < +\infty$. Prendiamo $\varepsilon > 0$. Sia $\psi_\varepsilon \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua a supporto compatto tale che

$$\|\psi_\varepsilon - \psi\|_q < \frac{\varepsilon}{4\|\varphi\|_p + 1}\,.$$

Indichiamo con $g_\varepsilon$ l'analogo di $g$ con $\psi_\varepsilon$ al posto di $\psi$:

$$u_\varepsilon(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\psi_\varepsilon(x + y)\, dy\,.$$

Nella differenza $u(x_k) - u(\bar{x})$ aggiungiamo e togliamo dei termini opportuni e usiamo ancora Hölder e l'invarianza per traslazioni:

$$\begin{aligned} \big|u(x_k) - u(\bar{x})\big| = \bigg| &\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\big(\psi(x_k + y) - \psi_\varepsilon(x_k + y)\big)\, dy + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\big(\psi_\varepsilon(x_k + y) - \psi_\varepsilon(\bar{x} + y)\big)\, dy + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\big(\psi_\varepsilon(\bar{x} + y) - \psi(\bar{x} + y)\big)\, dy\bigg| \le \\ &\le \|\varphi\|_p \cdot \|\psi - \psi_\varepsilon\|_q + \big|u_\varepsilon(x_k) - u_\varepsilon(\bar{x})\big| + \|\varphi\|_p \cdot \|\psi - \psi_\varepsilon\|_q \le \\ &\le 2\|\varphi\|_p \cdot \frac{\varepsilon}{4\|\varphi\|_p + 1} + \big|u_\varepsilon(x_k) - u_\varepsilon(\bar{x})\big| \le \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + \big|u_\varepsilon(x_k) - u_\varepsilon(\bar{x})\big|\,. \end{aligned}$$

Le ipotesi del caso già dimostrato sono valide per $g_\varepsilon$. Quindi esiste $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n \ge N_\varepsilon \qquad \big|u_\varepsilon(x_k) - u_\varepsilon(\bar{x})\big| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

In definitiva

$$\forall n \ge N_\varepsilon \qquad \big|u(x_k) - u(\bar{x})\big| < \varepsilon\,,$$

che prova quanto volevamo.
Rimane da vedere il caso $q = +\infty$. Per fortuna la traslazione di variabili $z = x + y$ scambia le parti fra $\varphi$ e $\psi$:

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\psi(x + y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z - x)\psi(z)\, dz = v(-x)\,,$$

dove

$$v(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z)\varphi(x + z)\, dz\,.$$

La funzione $v$ è continua per quanto già dimostrato. Quindi anche $u$ è continua.

**b.** Poniamo

$$g(x) := \int_{x+D} f\, d\lambda_n \qquad \text{per } x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Riscriviamo l'integrale usando le funzioni caratteristiche:

$$g(x) = \int_{x+D} f\, d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\chi_{x+D}(y)\, dy\,,\ ,$$

Osserviamo che

$$\chi_{x+D}(y) = \left\{\begin{matrix} 1 & \text{se } y \in x+D, \text{ cioè se } y-x \in D \\ 0 & \text{se } y \notin x+D, \text{ cioè se } y-x \notin D \end{matrix}\right\} = \chi_D(y-x)\,.$$

Dunque ci siamo già portati più vicini alla situazione del punto **a** identificando $\chi_D$ con $\psi$:

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\chi_D(-x+y)\, dy\,, \qquad \text{cioè} \qquad g(-x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\chi_D(x+y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\chi_D(x+y)\, dy\,.$$

Essendo $D$ misurabile limitato, $\chi_D \in L^q(\mathbb{R}^n)$ per ogni $q \in [1,+\infty]$. Purtroppo le ipotesi su $f$ non garantiscono che appartenga ad alcun $L^p(\mathbb{R}^n)$. Però a noi basta dimostrare che $x \mapsto g(-x)$ è continua in ogni palla aperta del tipo $B(0,R[$. Sia $r>0$ tale che $D \subset B(0,r[$. Allora se $\|x\|<R$ vale l'uguaglianza

$$\forall y \in \mathbb{R}^n \qquad f(y)\chi_D(x+y) = \Big(f(y)\chi_{B(0,r+R[}(y)\Big)\chi_D(x+y)\,.$$

Infatti è ovvia per $\|y\|<r+R$, mentre altrimenti

$$\Big(\|x\|<R \text{ e } \|y\| \ge r+R\Big) \quad\Rightarrow\quad \|x+y\| \ge \|y\|-\|x\| \ge (r+R)-R = r \quad\Rightarrow\quad x+y \notin D \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad \chi_D(x+y) = 0 \quad\Rightarrow\quad f(y)\chi_D(x+y) = \Big(f(y)\chi_{B(0,r+R[}(y)\Big)\chi_D(x+y)\,.$$

Possiamo dunque scrivere

$$\|x\|<R \quad\Rightarrow\quad g(-x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\chi_D(x+y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\Big(f(y)\chi_{B(0,r+R[}(y)\Big)}_{=:\varphi(y)}\chi_D(x+y)\, dy\,.$$

Ora la funzione

$$\varphi(y) := f(y)\chi_{B(0,r+R[}(y)$$

è in $L^1(\mathbb{R}^n)$ per ipotesi. Possiamo dunque applicare il caso **a** e dedurre che $x \mapsto g(-x)$ è continua su $B(0,R[$. Essendo $R>0$ arbitrario concludiamo che $g$ è continua ovunque.

**2.** Sia $x \in H$ qualsiasi. Sia $K := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|y_n\|$. Questo $K$ è finito per ipotesi. Essendo il sistema $e_\alpha$ completo, fissato $\varepsilon>0$ esiste una combinazione lineare finita $x_\varepsilon$ di elementi del sistema che differisce da $x$ meno di quanto ci serve, e precisamente:

$$x_\varepsilon := \sum_{j=1}^k c_j e_{\alpha_j}\,, \qquad \|x_\varepsilon - x\| \le \frac{\varepsilon}{2K+1}\,.$$

Allora

$$\begin{aligned}\big|(x \mid y_n)\big| &= \Big|(x_\varepsilon \mid y_n) + (x-x_\varepsilon \mid y_n)\Big| \le \big|(x_\varepsilon \mid y_n)\big| + \big|(x-x_\varepsilon \mid y_n)\big| \le \\ &\le \sum_{j=1}^k |c_j|\cdot\big|(e_{\alpha_j} \mid y_n)\big| + \|x-x_\varepsilon\|\cdot\|y_n\| \le \sum_{j=1}^k |c_j|\cdot\big|(e_{\alpha_j} \mid y_n)\big| + \frac{\varepsilon}{2K+1}\cdot K \le \\ &\le \sum_{j=1}^k |c_j|\cdot \underbrace{\big|(e_{\alpha_j} \mid y_n)\big|}_{\substack{\to 0 \\ \text{per } n\to+\infty}} + \frac{\varepsilon}{2}\,.\end{aligned}$$

Poiché per ipotesi $(e_{\alpha_j} \mid y_n) \to 0$ per $n \to +\infty$ per ogni $j$ da 1 a $k$, per il teorema sul limite della somma (finita) di successioni convergenti esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{j=1}^{k} |c_j| \cdot \left|(e_{\alpha_j} \mid y_n)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{per ogni } n \geq n_0\,.$$

In definitiva per ogni $n \geq n_0$ si ha che $|(x \mid y_n)| \leq \varepsilon$. In altre parole $(x \mid y_n) \to 0$ per $n \to +\infty$.
Per vedere che il risultato è falso in dimensione infinita se si toglie l'ipotesi che $y_n$ sia limitata, prendiamo $A = \mathbb{N}$ e poniamo

$$y_n := n^2 e_n\,.$$

Allora $(y_n \mid e_k) = 0$ se $n \neq k$, per cui $(y_n \mid e_k) \to 0$ per $n \to +\infty$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Prendiamo ora

$$x := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} e_k\,.$$

La serie che definisce $x$ converge in $H$ perché $\sum_k 1/k^2 < +\infty$. Ora per la continuità del prodotto scalare possiamo far uscire la somma e ottenere

$$(x \mid y_n) = \left( \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} e_k \middle| n^2 e_n \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} n^2 (e_k \mid e_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} n^2 \delta_{k,n} = \frac{1}{n} n^2 = n\,,$$

dove $\delta_{i,j} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{i,j} = 0$ se $i \neq j$. È chiaro che $(x \mid y_n) \nrightarrow 0$ per $n \to +\infty$.