Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 1996/97

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

# Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 2 febbraio 1998

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento di identità (se chiesto):

Chi porta quest'unico modulo ha 90 minuti di tempo e deve ritenersi a punteggio pieno con 15 punti. Chi porta due moduli ha tempo tre ore complessive e ha punteggio pieno con 30 punti, anche se presi tutti da uno solo dei due compiti.

**1.** Dimostrare che per ogni $\alpha \in [0,1]$ si ha che

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x^2}\, dx \leq \frac{\pi^{(1-\alpha)/2}}{2}\,.$$

(Scrivere l'integrando come prodotto $(x^\alpha e^{-\alpha x^2})(e^{-(1-\alpha)x^2})$ e usare Hölder…).

**2.** Sia $H$ uno spazio di Hilbert, $C$ un convesso chiuso non vuoto in $H$, $x \in H$ e $y \in C$. Allora $y$ è il punto di $C$ con minima distanza da $x$ se e solo se

$$\Re(x-y \mid z-y) \leq 0 \quad \text{per ogni } z \in C\,.$$

(Per $z \in C$ considerare il segmento di estremi $y$ e $z$; dire che $y$ è di minima distanza da $x$ vuol dire che tale funzione sul segmento vale non meno che in $y$; parametrizzare il segmento…)

**3.** È assegnata una successione numerica $a\colon n \mapsto a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Presa una qualsiasi altra successione numerica $x\colon n \mapsto x_n$ definiamo $Ax$ come la successione $n \mapsto a_n x_n$.

**a.** Dimostrare che $A$ manda $\ell^1(\mathbb{N})$ in se stesso se e solo se $a_n$ è limitata. In tal caso $A$ è lineare e continua da $\ell^1(\mathbb{N})$ in sé e la norma operatoriale di $A$ è $\sup_n |a_n|$.

**b.** Sia $a_n$ limitata. Allora $A\colon \ell^1(\mathbb{N}) \to \ell^1(\mathbb{N})$ è iniettiva se e solo se $a_n \neq 0$ per ogni $n$.

**c.** Sia $a_n$ limitata. Allora $A\colon \ell^1(\mathbb{N}) \to \ell^1(\mathbb{N})$ è biiettiva se e solo se $\inf_n |a_n| > 0$, e in tal caso $A^{-1}$ è continua calcolarne la norma.

*Punti: 5, 5, 8+3+6*

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1996/97

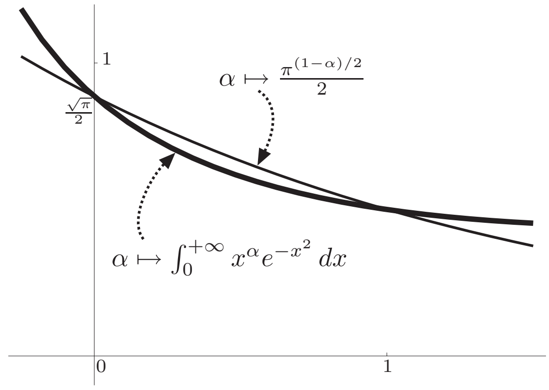
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

# Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 2 febbraio 1998

Svolgimento

**1.** Scriviamo $x^\alpha e^{-x^2}$ come prodotto $(x^\alpha e^{-\alpha x^2})(e^{-(1-\alpha)x^2})$ e usiamo la disuguaglianza di Hölder, elevando il primo fattore alla potenza $p = 1\alpha$, che è in $[1, +\infty[$ se $\alpha \in [0, 1[$, in modo da eliminare $\alpha$ dall'integrando. Il secondo fattore andrà elevato all'esponente coniugato:




$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}\,,$$

per cui

$$q = \frac{p}{p-1} = \frac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{1}{\alpha} - 1} = \frac{1}{1-\alpha}\,.$$

Miracolosamente elevando alla $q$ il parametro $\alpha$ viene eliminato pure dal secondo fattore. Dunque

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x^2}\,dx &\le \left(\int_0^{+\infty} \left(x^\alpha e^{-\alpha x^2}\right)^p dx\right)^{1/p} \left(\int_0^{+\infty} \left(e^{-(1-\alpha)x^2}\right)^q dx\right)^{1/q} = \\
&= \left(\int_0^{+\infty} \left(x^\alpha e^{-\alpha x^2}\right)^{1/\alpha} dx\right)^{\alpha} \left(\int_0^{+\infty} \left(e^{-(1-\alpha)x^2}\right)^{1/(1-\alpha)} dx\right)^{1-\alpha} = \\
&= \left(\int_0^{+\infty} x e^{-x^2}\,dx\right)^{\alpha} \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^{1-\alpha} = \\
&= \left(\left[-\frac{e^{-x^2}}{2}\right]_0^{+\infty}\right)^{\alpha} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{1-\alpha} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} \cdot \frac{\pi^{(1-\alpha)/2}}{2^{1-\alpha}} = \\
&= \frac{\pi^{(1-\alpha)/2}}{2}\,.
\end{aligned}$$

Nel caso speciale $\alpha = 1$ il conto si fa esplicito e la disuguaglianza diventa uguaglianza:

$$\int_0^{+\infty} x^1 e^{-x^2}\,dx = \left[-\frac{e^{-x^2}}{2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2} = \frac{\pi^{(1-1)/2}}{2}\,.$$

**Esercizio:** dimostrare che $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Gamma((1+\alpha)/2)$ per ogni $\alpha > -1$.

**2.** Sia $H$ uno spazio di Hilbert, $C$ un convesso chiuso non vuoto in $H$, $x \in H$, sia $y \in C$. Allora

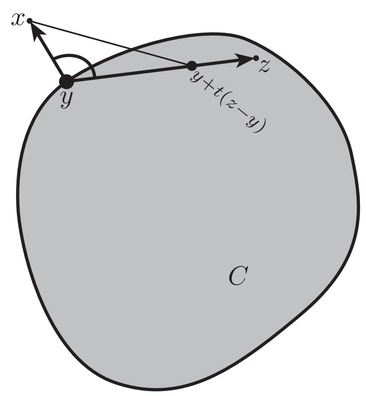
$$y \text{ è il punto di minima distanza di } C \text{ da } x$$

vuol dire che

$$\|x - z\| \ge \|x - y\| \qquad \forall z \in C\,,$$

cioè anche, elevando al quadrato le norme:

$$\|x - z\|^2 \ge \|x - y\|^2 \qquad \forall z \in C\,.$$




Poiché $C$ è convesso chiuso, $z \in C$ se e solo se tutti i punti del segmento di estremi $y$ e $z$ (estremi compresi) appartengono a $C$. Il segmento si parametrizza come $tz + (1-t)y = y + t(z-y)$ per $t \in [0,1]$. Possiamo riscrivere la condizione come

$$\big\|x - (y + t(z-y))\big\|^2 \geq \|x-y\|^2 \qquad \forall z \in C \quad \forall t \in [0,1]\,.$$

Sviluppiamo i quadrati:

$$\|x-y\|^2 + t^2\|z-y\|^2 - 2t\Re\big(x-y \mid z-y\big) \geq \|x-y\|^2 \quad \forall z \in C \quad \forall t \in [0,1]\,.$$

Semplificando e raccogliendo $t$:

$$t\Big(t\|z-y\|^2 - 2\Re\big(x-y \mid z-y\big)\Big) \geq 0 \qquad \forall z \in C \quad \forall t \in [0,1]\,.$$

Per $t=0$ la proprietà è verificata indipendentemente da $x,y,z$. Quindi per $t>0$ possiamo dividere per $t$ e ottenere l'espressione equivalente:

$$\Big(t = 0 \text{ e } 0 \geq 0\Big) \text{ oppure } \Big(t > 0 \quad \text{e} \quad t\|z-y\|^2 - 2\Re\big(x-y \mid z-y\big) \geq 0\Big) \qquad \forall t \in [0,1] \quad \forall z \in C\,,$$

cioè, cancellando la condizione per $t=0$, che è vera automaticamente,

$$\Re\big(x-y \mid z-y\big) \leq \frac{t\|z-y\|^2}{2} \qquad \forall t \in \,]0,1] \quad \forall z \in C\,,$$

Se la condizione è verificata allora possiamo far tendere $t \to 0^+$ e dedurre che:

$$\Re\big(x-y \mid z-y\big) \leq 0 \qquad \forall z \in C\,.$$

Viceversa, se $\Re(x-y \mid z-y) \leq 0$ allora ovviamente la formula $\Re(x-y \mid z-y) \leq t\|z-y\|^2/2$ è vera per ogni $t>0$. Questo è quanto volevamo dimostrare. Il risultato ha un'interpretazione geometrica, almeno nel caso di spazi di Hilbert reali: dice che $y$ è il punto di $C$ più vicino a $x$ se e solo se ogni segmento che congiunga $y$ con un punto di $C$ forma col segmento fra $y$ ed $x$ un angolo ottuso (o al più retto).

**3. a.** Supponiamo che $a$ sia limitata, cioè che $\alpha := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < +\infty$. Sia $x \in \ell^1(\mathbb{N})$. Allora

$$\|Ax\|_{\ell^1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \big|(Ax)_n\big| = \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n x_n| \leq \alpha \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = \alpha\|x\|_{\ell^1} < +\infty\,,$$

per cui $A$ manda $\ell^1(\mathbb{N})$ in sé. Viceversa, supponiamo che $\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| = +\infty$, cioè che esista una sottosuccessione $a_{n_k}$ che

$$\lim_{k\to+\infty} |a_{n_k}| = +\infty\,.$$

Possiamo supporre, prendendo eventualmente un'ulteriore sottosuccessione, che $|a_{n_k}| \geq k^2$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Ora definiamo la successione $x$ come

$$x_j := \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq n_k \text{ per ogni } k \in \mathbb{N}, \\ 1/k^2 & \text{se } j = n_k \text{ per un (unico) } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Evidentemente $x \in \ell^1(\mathbb{N})$. Però

$$\|Ax\|_{\ell^1} = \sum_{j\in\mathbb{N}} |a_j x_j| = \sum_{k\in\mathbb{N}} \big|a_{n_k} x_{n_k}\big| = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left|\frac{a_{n_k}}{k^2}\right| \geq \sum_{k\in\mathbb{N}} 1 = +\infty\,.$$

Che $A$ sia lineare è ovvio. Che sia continua da $\ell^1(\mathbb{N})$ in $\ell^1(\mathbb{N})$ con norma operatoriale $\|A\|_{\mathcal{L}(\ell^1,\ell^1)}$ non più grande di $\alpha$ risulta dalla disuguaglianza vista sopra

$$\|Ax\|_{\ell^1} \le \alpha \|x\|_{\ell^1}\,.$$

Per dimostrare che la norma è esattamente $\alpha$ prendiamo $\varepsilon > 0$ qualsiasi e $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $|a_{n_\varepsilon}| > \alpha - \varepsilon$. Se definiamo la successione $x$ come

$$x_j := \begin{cases} 1 & \text{se } j = n_\varepsilon, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

allora $x \in \ell^1(\mathbb{N})$, $\|x\|_{\ell^1} = 1$ e

$$\|Ax\|_{\ell^1} = \sum_{j\in\mathbb{N}} |a_j x_j| = |a_{n_\varepsilon} \cdot 1| > (\alpha - \varepsilon)\cdot 1 = (\alpha-\varepsilon)\|x\|_{\ell^1}\,,$$

da cui si deduce che $\|A\|_{\mathcal{L}(\ell^1,\ell^1)} > \alpha - \varepsilon$. Valendo questo per ogni $\varepsilon > 0$ ricaviamo $\|A\|_{\mathcal{L}(\ell^1,\ell^1)} \ge \alpha$, che unita alla disuguaglianza già dimostrata produce l'uguaglianza $\|A\|_{\mathcal{L}(\ell^1,\ell^1)} = \alpha$.

**3. b.** Assumiamo in tutto questo punto che $a$ sia limitata. Supponiamo poi che $A$ sia iniettiva su $\ell^1(\mathbb{N})$. Sia $n_0 \in \mathbb{N}$ qualsiasi. Poniamo

$$x_j := \begin{cases} 1 & \text{se } j = n_0, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad y_j := 0 \qquad \forall j \in \mathbb{N}\,.$$

Evidentemente $x, y \in \ell^1(\mathbb{N})$ e $x \neq y$. Allora anche $Ax, Ay$ devono essere distinti. Ma

$$(Ax)_j := \begin{cases} a_{n_0} & \text{se } j = n_0, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad (Ay)_j := 0 \qquad \forall j \in \mathbb{N}\,.$$

$Ax$ e $Ay$ sono diversi se e solo se $a_{n_0} \neq 0$. Quindi se $A$ è iniettiva allora $a_{n_0} \neq 0$ per ogni $n_0 \in \mathbb{N}$.
Viceversa, supponiamo che $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora per ogni $x, y \in \ell^1(\mathbb{N})$ vale $Ax = Ay$ se e solo se $(Ax)_n = (Ay)_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, cioè $a_n x_n = a_n y_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, che equivale a $x_n = y_n$ per ogni $n$, cioè a $x = y$. Insomma, se $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora $A$ è iniettiva su $\ell^1(\mathbb{N})$.

**3. c.** Supponiamo che $a$ sia limitata e che $A$ sia biiettiva da $\ell^1(\mathbb{N})$ in sé. In particolare $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ per il punto precedente. Sia $y \in \ell^1(\mathbb{N})$, $x = A^{-1}y$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$y = Ax\,, \quad \text{cioè} \quad y_n = a_n x_n\,, \quad \text{cioè} \quad x_n = \big(A^{-1}y\big)_n = \frac{1}{a_n} y_n\,.$$

Introducendo la successione $b_n := 1/a_n$ e l'operatore fra successioni $Bx$ associato a $b$ (ossia $(Bx)_n := b_n x_n$), abbiamo che $A^{-1} = B$. Essendo $\ell^1(\mathbb{N})$ uno spazio di Banach, per il teorema della mappa aperta ogni applicazione lineare continua e biiettiva da $\ell^1(\mathbb{N})$ in sé ha l'inversa continua. Per i punti precedenti, dire che $A^{-1} = B$ è continua equivale a dire che $b$ è limitata e mai nulla. In particolare

$$0 < \sup_{n\in\mathbb{N}} |b_n| = \|B\|_{\mathcal{L}(\ell^1,\ell^1)} < +\infty\,,$$

che implica che

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} |a_n| = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{|b_n|} = \frac{1}{\sup_{n\in\mathbb{N}} |b_n|} > 0$$

per cui

$$\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(\ell^1,\ell^1)} = \|B\|_{\mathcal{L}(\ell^1,\ell^1)} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |b_n| = \frac{1}{\inf_{n\in\mathbb{N}} |a_n|}\,.$$

Viceversa, supponiamo che $a$ sia limitata e che $\inf_{n\in\mathbb{N}} |a_n| > 0$. Poniamo $b_n = 1/a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e definiamo $B$ come $(Bx)_n := b_n x_n = x_n/a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si vede subito che $BAx = ABx = x$ per ogni $x \in \ell^1(\mathbb{N})$. Quindi $A$ è biiettiva.
Vale un risultato simile a quello di questo esercizio scrivendo $\ell^p(\mathbb{N})$ con $p \in [1, +\infty]$ al posto di $\ell^1(\mathbb{N})$?