Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 4 dicembre 1997

Cognome e Nome:

Matricola: Documento di identità (se chiesto):

Chi porta quest'unico modulo ha 90 minuti di tempo e deve ritenersi a punteggio pieno con 15 punti. Chi porta due moduli ha tempo tre ore complessive e ha punteggio pieno con 30 punti, anche se presi tutti da uno solo dei due compiti.

1. Nello spazio di Hilbert $L^2([-1,1])$ sia M il sottospazio generato dalle funzioni $1, x, x^2$.

a. Calcolare una base ortonormale di M.

b. Se H è uno spazio di Hilbert e S è un sottospazio vettoriale chiuso, dimostrare che per ogni $x \in H$

$$\min\{\|x-y\| \;:\; y \in S\} = \max\Big\{\big|(x \mid z)\big| \;:\; z \in S^\perp,\ \|z\| = 1\Big\}.$$

Per quali y, z vengono raggiunti i due estremi?

c. Calcolare il

$$\max\left\{\left|\int_{-1}^{1} x^3 g(x)\,dx\right| \;:\; g \in M^\perp,\ \|g\|_{L^2([-1,1])} = 1\right\}.$$

e trovare la g (o le g) per il quale viene raggiunto.

2. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura positiva con $\mu(X) < +\infty$. Sia V l'insieme delle funzioni $X \to \mathbb{R}$ limitate (anche non $\mathcal{M}$-misurabili), ed S l'insieme delle funzioni $X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{M}$-semplici. $\mathcal{P}(X)$ è l'insieme di tutti i sottinsiemi di X.

a. Dimostrare che V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e che il funzionale $p\colon V \to \mathbb{R}$ definito come $p(f) := \sup f$ è positivamente omogeneo ($p(\lambda f) = \lambda p(f)$ se $f \in V, \lambda \geq 0$) e subadditivo ($p(f_1 + f_2) \leq p(f_1) + p(f_2)$ se $f_1, f_2 \in V$).

b. Dimostrare che esiste una funzione $\tilde{\mu}\colon \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ che coincide con μ su $\mathcal{M}$, che è nonnegativa ($\tilde{\mu}(A) \geq 0$ per $A \subseteq X$) e finitamente additiva ($\tilde{\mu}(A \cup B) = \tilde{\mu}(A) + \tilde{\mu}(B)$ se $A, B \subseteq X$ sono disgiunti).

(Verificato che S è un sottospazio di V, definire $\varphi\colon V \to \mathbb{R}$ come $\varphi(f) := \int_X f\,d\mu$ per $f \in S$. Tirare in ballo la p del punto precedente e usare il teorema di Hahn-Banach per estendere φ a una $\Phi\colon V \to \mathbb{R}$ in modo tale che... Definire $\tilde{\mu}(A) := \Phi(\chi_A)\ldots$).

Punti: 5+5+5, 4+11

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 4 dicembre 1997

Svolgimento

1. a. Diamo dei nomi alle tre funzioni che generano il sottospazio M: $f_1(x) := 1$, $f_2(x) := x$, $f_3(x) := x^2$. Per trovare una base ortonormale di M rispetto al prodotto scalare di $L^2([-1,1])$ possiamo procedere con Gram-Schmidt sulla tripla f_1, f_2, f_3. Per prima cosa normalizziamo f_1:

$$\|f_1\|_{L^2}^2 = \int_{-1}^{1} |f_1(x)|^2\,dx = \int_{-1}^{1} 1^2\,dx = 2\,,$$

e poniamo

$$e_1(x) := \frac{f_1(x)}{\|f_1\|_{L^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

La componente di f_2 lungo e_1 è

$$(f_2 \mid e_1)_{L^2} = \int_{-1}^{1} f_2(x)e_1(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,dx = 0$$

(l'integrando è dispari e il dominio è simmetrico rispetto all'origine). Possiamo prendere come e_2 la normalizzata di f_2: la norma al quadrato è

$$\|f_2\|_{L^2}^2 = \int_{-1}^{1} |f_2(x)|^2\,dx = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \Big[\frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{1} = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}\,,$$

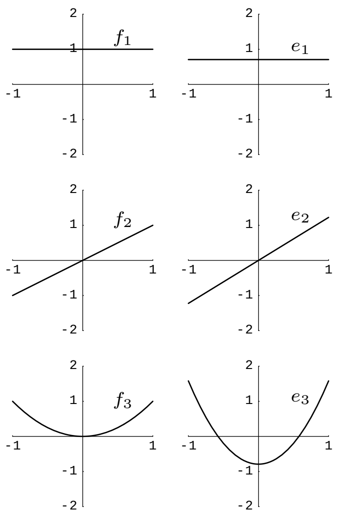
per cui

$$e_2(x) := \frac{f_2(x)}{\|f_2\|_{L^2}} = \frac{x}{\sqrt{2/3}} = x\sqrt{\frac{3}{2}}\,.$$

Le componenti di f_3 lungo e_1, e_2 sono

$$(f_3 \mid e_1) = \int_{-1}^{1} x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,dx = \Big[\frac{x^3}{3\sqrt{2}}\Big]_{-1}^{1} = \frac{1^3}{3\sqrt{2}} - \frac{(-1)^3}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\,,$$

$$(f_3 \mid e_2) = \int_{-1}^{1} x^2\cdot x\sqrt{\frac{3}{2}}\,dx = 0\,.$$



Sottraiamo da f_3 le sue proiezioni su e_1 ed e_2:

$$f_3(x) - (f_3 \mid e_1)e_1(x) - (f_3 \mid e_2)e_2(x) = x^2 - \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - 0 = x^2 - \frac{1}{3}$$

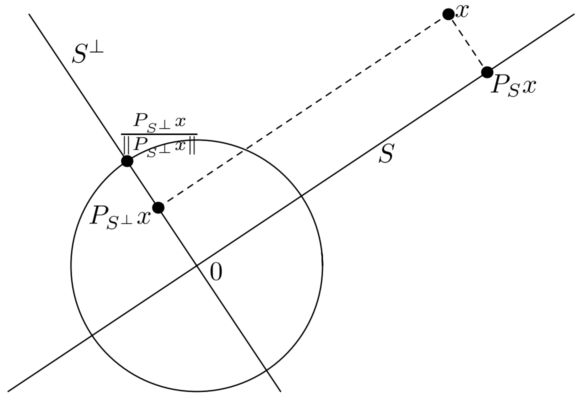
e calcoliamo la norma:

$$\int_{-1}^{1}\Big(x^2 - \frac{1}{3}\Big)^2 dx = \int_{-1}^{1}\Big(x^4 - \frac{2x^2}{3} + \frac{1}{9}\Big)dx = \Big[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{9} + \frac{x}{9}\Big]_{-1}^{1} =$$
$$= 2\Big(\frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9}\Big) = 2\cdot\frac{9 - 10 + 5\sqrt{3}}{45} = \frac{8}{45}\,.$$

Normalizzando possiamo quindi porre

$$e_3(x) := \frac{x^2 - 1/3}{\sqrt{8/45}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\Big(x^2 - \frac{1}{3}\Big)\,.$$

b. Dal teorema della proiezione ortogonale sappiamo che dato $x \in H$ e il sottospazio vettoriale chiuso S la minima distanza di un punto $y \in S$ da x viene realizzata in un unico punto $P_S x$ chiamato proiezione ortogonale di x su S, che è caratterizzato dalla proprietà che $x - P_S x$ è ortogonale a S. Il vettore $x - P_S x$ è la proiezione ortogonale di x su $S^\perp$. Consideriamo ora $z \in S^\perp$, $\|z\|_H = 1$. Possiamo scrivere



$$(x \mid z)_H = \big(P_S x + P_{S^\perp} x \mid z\big)_H = \big(P_{S^\perp} x \mid z\big)_H \,.$$

Per la disuguaglianza di Schwarz, se $\|z\|_H = 1$,

$$\big|(x \mid z)_H\big| = \big|(P_{S^\perp} x \mid z\big)_H\big| \le \big\|P_{S^\perp} x\big\|_H \,.$$

Quindi

$$\sup\Big\{\big|(x \mid z)_H\big| \;:\; z \in S^\perp,\ \|z\|_H = 1\Big\} \le \big\|P_{S^\perp} x\big\|_H \,.$$

Dimostriamo che l'estremo superiore è in fatti un minimo. Supponiamo che $x \neq 0$. Se poniamo $z = P_{S^\perp} x / \|P_{S^\perp} x\|_H$ abbiamo che $z \in S^\perp$, $\|z\|_H = 1$ e

$$\big|(x \mid z)_H\big| = \big\|P_{S^\perp} x\big\|_H \,.$$

Se $x \neq 0$ l'estremo superiore vale proprio $\|P_{S^\perp} x\|_H$ e viene pertanto raggiunto nel punto $z = P_{S^\perp} x / \|P_{S^\perp} x\|_H$. Supponiamo che $z \in S^\perp$, con $\|z\|_H = 1$, sia un altro punto in cui è raggiunto il massimo:

$$\big|(x \mid z)_H\big| = \big\|P_{S^\perp} x\big\|_H \,.$$

Allora

$$\big\|P_{S^\perp} x\big\|_H \cdot \|z\|_H = \big\|P_{S^\perp} x\big\|_H = \big|(x \mid z)_H\big| = \big|(P_{S^\perp} x \mid z)_H\big| \,,$$

Il primo e l'ultimo membro sono i due membri della disuguaglianza di Schwarz $|(P_{S^\perp} x \mid z)_H| \le \|P_{S^\perp} x\|_H \cdot \|z\|_H$. Sappiamo che vale l'uguaglianza se e solo se $P_{S^\perp} x$ e z sono linearmente dipendenti. Quando $x \notin S$ questo significa semplicemente $z = \alpha P_{S^\perp} x / \|P_{S^\perp} x\|_H$ con α uno scalare di norma 1. Se invece $x \in S$ la z è qualsiasi.
Il caso $x = 0$ rientra come sottocaso del caso $x \in S$. Conclusione:

$$\max\Big\{\big|(x \mid z)_H\big| \;:\; z \in S^\perp,\ \|z\|_H = 1\Big\} = \big\|P_{S^\perp} x\big\|_H$$

e viene raggiunto per gli $z \in S^\perp$, $\|z\|_H = 1$, linearmenti dipendenti da $P_{S^\perp} x$.

c. Se poniamo $f(x) := x^3$, il problema di trovare il

$$\max\Big\{\Big|\int_{-1}^{1} x^3 g(x)\,dx\Big| \;:\; g \in M^\perp,\ \|g\|_{L^2([-1,1])} = 1\Big\}$$

si traduce nel problema astratto trattato nel punto **b**:

$$\max\Big\{\big|(f \mid g)\big| \;:\; g \in M^\perp,\ \|g\|_{L^2([-1,1])} = 1\Big\}/,.$$

Per trovare questo massimo dobbiamo calcolare la proiezione di f sul sottospazio $M^\perp$. Questo è a dimensione infinita, ma il suo ortogonale è M, che ha dimensione 3 e di cui abbiamo già calcolato una base ortonormale. Quindi

$$(P_M f)(x) = \sum_{i=1}^{3} (f \mid e_i)_H e_i(x) \,.$$

Calcoliamo i tre integrali:

$$
\begin{aligned}
(f \mid e_1)_{L^2([-1,1])} &= \int_{-1}^{1} x^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\,dx = 0 \quad \text{(funzione dispari)},\\
(f \mid e_2)_{L^2([-1,1])} &= \int_{-1}^{1} x^3 \cdot x\sqrt{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}\big[x^5\big]_{-1}^{1} = 2\cdot\frac{1}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot 1^5 = \frac{\sqrt{6}}{5}\,,\\
(f \mid e_3)_{L^2([-1,1])} &= \int_{-1}^{1} x^3 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\Big(x^2-\frac{1}{3}\Big)\,dx = 0 \quad \text{(funzione dispari)}.
\end{aligned}
$$

Dunque

$$
\begin{aligned}
(P_M f)(x) &= (f \mid e_2)e_2(x) = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot x\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3}{5}x\,,\\
(P_{M^\perp} f)(x) &= (f - P_M f)(x) = x^3 - \frac{3}{5}x\,,\\
\|P_{M^\perp} f\|^2_{L^2([-1,1])} &= \int_{-1}^{1}\Big(x^3-\frac{3}{5}x\Big)^2 dx = \int_{-1}^{1}\Big(x^6 - \frac{6}{5}x^4 + \frac{9}{25}x^2\Big)\,dx =\\
&= \Big[\frac{x^7}{7} - \frac{6}{25}x^5 + \frac{3}{25}x^3\Big]_{-1}^{1} = 2\Big(\frac{1^7}{7} - \frac{6}{25}1^5 + \frac{3}{25}1^3\Big) = \frac{8}{175} = \frac{2^3}{5^2\cdot 7}\,,\\
\bar g(x) &:= \frac{f - P_M f}{\|f - P_M f\|_{L^2([-1,1])}}(x) = \frac{5\sqrt{14}}{4}\Big(x^3 - \frac{3}{5}x\Big)\,.
\end{aligned}
$$

Conclusione: il massimo cercato vale $5\sqrt{14}/4$ e viene raggiunto per $g = \alpha\bar g$, con α uno scalare di modulo 1 e $\bar g$ definita sopra.

2. a. Somma di funzioni limitate è limitata, e prodotto di uno scalare per una funzione limitata dà pure una funzione limitata. Quindi V è uno spazio vettoriale. Poniamo $p(f) := \sup f \in \mathbb{R}$ per $f \in V$. Se $f \in V$ e $\lambda > 0$ dovrebbe essere conoscenza corrente che $\sup \lambda f = \lambda \sup f$. Verifichiamolo brevemente con la definizione di estremo superiore: moltiplicando o dividendo per λ le disuguaglianze si ha che

$$
f \le \alpha \quad\iff\quad \lambda f \le \lambda\alpha\,,
$$

per α è un maggiorante di f se e solo se $\lambda\alpha$ è un maggiorante di λf. Perciò $\bar\alpha$ è il minimo dei maggioranti di f se e solo se $\lambda\bar\alpha$ è il minimo dei maggioranti di λf. La subadditività è più semplice:

$$
\begin{aligned}
\Big(\forall x\in X \quad f_1(x) \le \sup f_1 \text{ e } f_2(x) \le \sup f_2\Big) \quad&\Rightarrow\quad \forall x \in X \quad f_1(x)+f_2(x) \le \sup f_1 + \sup f_2 \quad\Rightarrow\\
&\Rightarrow\quad \sup(f_1+f_2) \le \sup f_1 + \sup f_2\,,
\end{aligned}
$$

che vuol dire proprio che $p(f_1+f_2) \le p(f_1) + p(f_2)$.

b. Poniamo $\varphi(f) := \int_X f\,d\mu$ per $f \in S$. L'integrale di una funzione $\mathcal{M}$-semplice è ben definito e ha un valore reale finito perché $\mu(X) < +\infty$. Per $f \in S$ abbiamo la disuguaglianza

$$
\varphi(f) = \int_X f\,d\mu \le \int_X \sup f\,d\mu = \mu(X)\sup f = \mu(X)p(f)\,.
$$

La funzione $f \mapsto \mu(X)p(f)$ è positivamente omogenea e subadditiva da V in $\mathbb{R}$. La $\varphi\colon S \to \mathbb{R}$ è lineare e $\varphi(f) \le \mu(X)p(f)$ per ogni $f \in S \subseteq V$. Per il teorema di Hahn-Banach esiste una $\Phi\colon V \to \mathbb{R}$ lineare che estende φ e tale che $\Phi(f) \le \mu(X)p(f)$ per ogni $f \in V$. Per $A \subseteq X$ abbiamo che $\chi_A \in V$. Per analogia con la formula $\mu(A) = \int_X \chi_A\,d\mu = \varphi(\chi_A)$, valida per $A \in \mathcal{M}$, poniamo

$$
\tilde\mu(A) := \Phi(\chi_A) \qquad \text{per } A \in \mathcal{P}(X)\,.
$$

Questa $\tilde\mu$ coincide con μ sugli $A \in \mathcal{M}$ perché allora $\chi_A \in S$ e quindi $\tilde\mu(A) = \Phi(\chi_A) = \varphi(\chi_A) = \mu(A)$. Se $A, B \subseteq X$ sono disgiunti allora $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$, per cui

$$
A\cap B = \varnothing \quad\Rightarrow\quad \tilde\mu(A\cap B) = \Phi(\chi_{A\cap B}) = \Phi\big(\chi_A + \chi_B\big) = \Phi(\chi_A) + \Phi(\chi_B) = \tilde\mu(A) + \tilde\mu(B)\,.
$$

Dunque $\tilde\mu$ è finitamente additiva.