Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1996/97

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 24 settembre 1997

Cognome e Nome:

Matricola: Documento di identità (se chiesto):

Chi porta quest'unico modulo ha 90 minuti di tempo e deve ritenersi a punteggio pieno con 15 punti. Chi porta due moduli ha tempo tre ore complessive e ha punteggio pieno con 30 punti, anche se presi tutti da uno solo dei due compiti.

1. Sia $a_1, a_2, a_3 \ldots$ una successione reale tale che $\sum_n a_n^2 < +\infty$. Dimostrare che la serie $\sum_n a_n a_{n+1}$ converge assolutamente, che

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n a_{n+1}\right| \le \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 ,$$

e che l'uguaglianza vale soltanto se la successione è identicamente nulla.
(Ambientare in $\ell^2(\mathbb{N})$ e usare la disug...).

2. Sia X un sottospazio vettoriale *chiuso* di $L^2([a,b])$ (funzioni a valori reali), con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Supponiamo che X sia pure contenuto in $L^\infty([a,b])$. Dimostrare che

a. Per ogni $f \in L^\infty([a,b])$ si ha $\|f\|_2 \le \sqrt{b-a}\|f\|_\infty$.

b. X è un sottospazio *chiuso* anche di $L^\infty([a,b])$.
(Una successione che converga in L^∞ converge anche in L^2?).

c. Esiste $c > 0$ tale che $\|f\|_\infty \le c\|f\|_2$ per ogni $f \in X$.
(L'operatore "identità" dallo spazio $(X, \|\cdot\|_\infty)$ allo spazio $(X, \|\cdot\|_2)$ è continuo per il punto **a** e biiettivo; si può applicare il teorema della map...?).

d. Siano $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n \in X$ ortonormali in $L^2([a,b])$ e c la costante del punto precedente. Allora $\sum_{k=1}^n |f_k(x)|^2 \le c^2$ per quasi ogni $x \in [a,b]$.
(Nel caso $n = 2$, sia (α_k, β_k), $k \in \mathbb{N}$, una successione densa nel cerchio unitario di $\mathbb{R}^2$ rispetto alla norma euclidea. Usando il punto precedente mostrare che per x fuori da un sottinsieme trascurabile di $[a,b]$ per ogni k si ha $|\alpha_k f_1(x) + \beta_k f_2(x)| \le c$; che conclusione si trae sulla lunghezza euclidea del vettore $(f_1(x), f_2(x)) \in \mathbb{R}^2$?).

e. Dimostrare che necessariamente X ha dimensione finita.
(Se avesse dimensione infinita esisterebbe in X un sistema ortonormale numerabile $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$; dal punto precedente seguirebbe che la serie $\sum_n |f_n(x)|^2 \ldots$, e per la successione $|f_n(x)|^2$ ci sarebbe convergenza dominata...).

Punti: 5, 2+3+5+5+6

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, secondo modulo

Prova Scritta del 24 settembre 1997

Svolgimento

1. Sia $a := (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ la successione. Dire che $\sum_n a_n^2 < +\infty$ vale a dire che $a \in \ell^2(\mathbb{N})$. Sia $b := (a_2, a_3, a_4, \ldots)$. Allora per la disuguaglianza di Hölder rispetto alla misura del conteggio

$$\sum_n |a_n a_{n+1}| = \sum_n |a_n b_n| \le \Big(\sum_n |a_n|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_n |b_n|^2\Big)^{1/2} < +\infty\,,$$

per cui la serie $\sum_n a_n a_{n+1}$ converge assolutamente. Per la disuguaglianza di Schwarz in $\ell^2(\mathbb{N})$

$$\Big|\sum_n a_n a_{n+1}\Big| = \Big|\sum_n a_n b_n\Big| = \big|(a \mid b)_{\ell^2}\big| \le \|a\|_{\ell^2} \cdot \|b\|_{\ell^2} \le \|a\|_{\ell^2}^2 = \sum_n a_n^2\,,$$

visto che $\|b\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n\ge 2} a_n^2 \le \sum_{n \ge 1} a_n^2 = \|a\|_{\ell^2}^2$. Supponiamo che valgano le uguaglianze

$$\big|(a \mid b)_{\ell^2}\big| = \|a\|_{\ell^2} \cdot \|b\|_{\ell^2} = \|a\|_{\ell^2}^2\,,$$

e dimostriamo che necessariamente $a = 0$. Notiamo per cominciare che

$$\|b\|_{\ell^2} = \|a\|_{\ell^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_1 = 0\,.$$

Inoltre dalla disuguaglianza di Schwarz sappiamo che

$$\big|(a \mid b)_{\ell^2}\big| = \|a\|_{\ell^2} \cdot \|b\|_{\ell^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tale che } a = \lambda b \text{ oppure } b = \lambda a\,.$$

Facciamo il caso in cui $a = \lambda b$. Allora $a_n = \lambda a_{n+1}$ per ogni n. Se per assurdo risultasse $a \ne 0$, sia n_0 il più piccolo indice per il quale $a_{n_0} \ne 0$. Per quanto già visto $a_1 = 0$, per cui $n_0 > 1$, e possiamo scrivere $0 = a_{n_0-1} = \lambda a_{n_0}$, da cui $\lambda = 0$. Ma questo implica $a = \lambda b = 0$, contro l'ipotesi.
Supponiamo ora di essere nell'altro caso: $b = \lambda a$, cioè $a_{n+1} = \lambda a_n$. Allora per induzione da $a_1 = 0$ segue subito che $a_n = 0$ per ogni n.

2. a. Sia $f \in L^2([a, b])$. Allora, scrivendo "sup ess" per l'estremo superiore essenziale,

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_a^b \big|f(x)\big|^2\,dx \le \int_a^b \operatorname*{sup\,ess}_{x\in[a,b]} \big|f(x)\big|\,dx \le (b-a) \operatorname*{sup\,ess}_{x\in[a,b]} \big|f(x)\big| = (b-a)\|f\|_{L^\infty}\,.$$

b. Sia $f_n \in X$ una successione che converge verso $f \in L^\infty([a, b])$ rispetto alla norma di $L^\infty([a, b])$:

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0 \qquad \text{per } n \to +\infty\,.$$

Vogliamo dimostrare che $f \in X$. Ma per il punto **a** possiamo scrivere

$$\|f_n - f\|_2 \le \sqrt{b-a}\|f_n - f\|_\infty \to 0 \qquad \text{per } n \to +\infty\,,$$

da cui risulta che f sta nella chiusura di X in $L^2([a, b])$, cioè in X stesso.

c. Lo spazio vettoriale X può essere considerato normato sia rispetto alla norma di L^2 che rispetto a quella di L^∞, e in entrambi i casi risulta uno spazio di Banach (in quanto sottospazio *chiuso* sia di $L^2([a,b])$ che di $L^\infty([a,b])$). La funzione identità $I(f) := f$ da X in se stesso è evidentemente biiettiva e lineare. Inoltre se vista da $(X, \|\cdot\|_\infty)$ a $(X, \|\cdot\|_2)$ è anche continua per il punto **a**:

$$\|I(f)\|_2 \le \sqrt{b-a}\|f\|_\infty .$$

Per il teorema della mappa aperta la I è pure aperta. La sua inversa è dunque continua:

$$\exists c > 0 \quad \forall f \in X \quad \|I^{-1}(f)\|_\infty \le c\|f\|_2 .$$

Ricordandosi che $I^{-1}(f) = f$ si ricava che

$$\forall f \in X \quad \|f\|_\infty \le c\|f\|_2 .$$

d. Siano f_1, f_2 due elementi di X che sono ortonormali rispetto al prodotto scalare di $L^2([a,b])$:

$$\|f_1\|_2 = \|f_2\|_2 = 1 , \qquad (f_1 \mid f_2)_{L^2} = 0 .$$

Sia (α_k, β_k) una successione densa nel cerchio unitario $\mathbb{U}$ di $\mathbb{R}^2$, per esempio $(\alpha_k, \beta_k) := (\cos\theta_k, \operatorname{sen}\theta_k)$ dove $k \mapsto \theta_k$ è una successione che copre tutti i razionali. Per ogni k la combinazione lineare $\alpha_k f_1 + \beta_k f_2$ sta ancora in X. Per il punto **b** possiamo scrivere

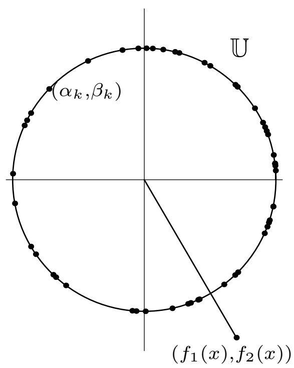
$$\begin{aligned}\big\|\alpha_k f_1 + \beta_k f_2\|_\infty &\le c\|\alpha_k f_1 + \beta_k f_2\|_2 = c\sqrt{(\alpha_k f_1 + \beta_k f_2 \mid \alpha_k f_1 + \beta_k f_2)_2} = \\ &= c\sqrt{\alpha_k^2\|f_1\|_2^2 + 2\alpha_k\beta_k(f_1 \mid f_2)_2 + \beta_k^2\|f_2\|_2^2} = c\sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2} = c .\end{aligned}$$

Per definizione di norma $\|\cdot\|_\infty$ esiste un $E_k \subset [a,b]$ trascurabile rispetto alla misura di Lebesgue tale che

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a,b] \setminus E_k \qquad \big|\alpha_k f_1(x) + \beta_k f_2(x)\big| \le c .$$

Sia $E := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$. Anche E è trascurabile secondo Lebesgue, e si ha che

$$\forall x \in [a,b] \setminus E \quad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \big|\alpha_k f_1(x) + \beta_k f_2(x)\big| \le c .$$



Per la densità della successione (α_k, β_k) nel cerchio unitario $\mathbb{U}$ possiamo scrivere che

$$\begin{aligned}&\forall x \in [a,b] \setminus E \quad \forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \\ &\qquad \alpha^2 + \beta^2 = 1 \ \Rightarrow\ \big|\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)\big| \le c .\end{aligned}$$

Sia ora $x \in [a,b]\setminus E$. Se $f_1(x) = f_2(x) = 0$ la disuguaglianza $f_1(x)^2 + f_2(x)^2 \le c^2$ è ovvia. Se invece almeno uno fra $f_1(x)$ e $f_2(x)$ è non nullo, scegliamo

$$(\alpha, \beta) := \frac{\big(f_1(x), f_2(x)\big)}{\sqrt{f_1(x)^2 + f_2(x)^2}} \in \mathbb{U} .$$

Sostituendo nella disuguaglianza precedente ricaviamo

$$\big|\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)\big| = \frac{f_1(x)^2 + f_2(x)^2}{\sqrt{f_1(x)^2 + f_2(x)^2}} \le c .$$

Si conclude che

$$\forall x \in [a,b] \setminus E \qquad \big(f_1(x)^2 + f_2(x)^2\big)^2 \le c^2 .$$

Nel caso generale in cui abbiamo n elementi $f_1, f_2, \dots, f_n$ di X, ortonormali rispetto al prodotto scalare di $L^2([a,b])$, per dimostrare che

$$\text{per quasi ogni } x \in [a,b] \qquad f_1(x)^2 + f_2(x)^2 + \cdots + f_n(x)^2 \le c^2$$

basta ripetere il procedimento fatto nel caso $n = 2$ usando al posto di (α_k, β_k) una successione densa nella sfera unitaria di $\mathbb{R}^n$.

e. Supponiamo per assurdo che X abbia dimensione infinita. In quanto spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare di $L^2([a,b])$, dovrebbe esistere un sistema ortonormale (non necessariamente completo) $f_1, f_2, f_3, \dots$ numerabile. Per il punto **d** si ha che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un insieme $F_n \subset [a,b]$, trascurabile secondo Lebesgue, tale che

$$\forall x \in [a,b] \setminus F_n \qquad f_1(x)^2 + f_2(x)^2 + \cdots + f_n(x)^2 \leq c^2 .$$

Posto $F := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, anche F è trascurabile e

$$\forall x \in [a,b] \setminus F \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad f_1(x)^2 + f_2(x)^2 + \cdots + f_n(x)^2 \leq c^2 .$$

Questo dice in particolare che per $x \in [a,b] \setminus F$ da una parte vale la disuguaglianza

$$|f_n(x)| \leq c$$

e dall'altra la serie a termini positivi

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)^2$$

ha somme parziali limitate superiormente. Pertanto la serie converge, e di conseguenza il termine generale è infinitesimo:

$$\forall x \in [a,b] \setminus F \qquad f_n(x) \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty .$$

Consideriamo ora l'integrale

$$\|f_n\|_{L^2}^2 = \int_a^b \bigl|f_n(x)\bigr|^2 \, dx .$$

Per quasi ogni x l'integrando è infinitesimo per $n \to +\infty$, e la convergenza è dominata dalla costante c^2, che è in $L^1([a,b])$. Per il teorema della convergenza dominata

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_{L^2}^2 = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} \bigl|f_n(x)\bigr|^2 \, dx = \int_a^b 0 \, dx = 0 ,$$

che contraddice l'ipotesi che $\|f_n\|_{L^2} = 1$ per tutti gli n.