Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2010/2011

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Programma Dettagliato

Prof. Gianluca Gorni

Testi di riferimento: Walter Rudin, Analisi Reale e Complessa, Boringhieri. Giuseppe De Marco, *Analisi Due* (prima edizione), Decibel-Zanichelli, capitolo II.18. Materiale didattico attinente al corso è anche disponibile presso

`http://www.dimi.uniud.it/gorni/Istituzioni`

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

Misura e integrazione astratta

σ-algebre di insiemi misurabili. Gli assiomi delle σ-algebre, degli spazi misurabili e delle funzioni misurabili, confrontati in parallelo con gli assiomi degli spazi topologici e delle funzioni continue. Prime conseguenze degli assiomi: le σ-algebre sono invarianti per unioni e intersezioni finite o numerabili, e per differenze. Lemma topologico: un aperto di $\mathbb{R}^2$ è l'unione di una famiglia numerabile di rettangoli. Una funzione a valori in $\mathbb{R}^N$ è misurabile se e solo se tutte le componenti sono misurabili. Somma e prodotto di funzioni misurabili reali o complesse sono misurabili. La funzione caratteristica di un insieme. La funzione caratteristica è misurabile se e solo se l'insieme è misurabile. Esempi di σ-algebre: la discreta, l'indiscreta, le σ-algebre su insiemi di 0, 1, 2 e 3 elementi. Cenno al numero di σ-algebre su un insieme finito di n elementi. Data una famiglia di sottinsiemi di X, esiste la minima σ-algebra su X che contiene la famiglia. Cenno alla "costruzione" della σ algebra generata da una famiglia di insiemi. La famiglia dei boreliani di uno spazio topologico. La famiglia dei boreliani di $\mathbb{R}$ e dei reali estesi $[-\infty, +\infty]$ è generata in alternativa dagli aperti, dai chiusi, dagli intervalli aperti, dalle semirette aperte.

Funzioni misurabili. Funzioni boreliane fra spazi topologici. Composizione di una funzione misurabile con una boreliana è misurabile. Richiami sul massimo e minimo limite di una successione di numeri reali (estesi). Data una successione di funzioni misurabili a valori reali estesi, anche gli estremi inferiori e superiori e i massimi e minimi limiti sono misurabili. Se una successione di funzioni misurabili converge puntualmente, la funzione limite è pure misurabile. Esercizi sulle funzioni misurabili. Il valore assoluto $|f|$, la parte positiva f^+, la parte negativa f^- e la parte intera $\lfloor f \rfloor$ di una funzione misurabile reale f sono pure misurabili.

Funzioni semplici. Definizione di funzione semplice su uno spazio misurabile. Le funzioni semplici reali o a valori in uno spazio vettoriale sono quelle che si possono scrivere (in modo non unico) come combinazione lineare di funzioni caratteristiche. Funzioni semplici misurabili. Teorema della discretizzazione: una funzione positiva misurabile è sempre il limite puntuale di una successione crescente di funzioni semplici misurabili positive. Rappresentazione come serie: una funzione f reale positiva è misurabile se e solo se $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{-n}\chi_{E_n}$, con E_n misurabile.

Misure positive e definizione di integrale di funzioni misurabili positive. Gli assiomi delle misure positive su una σ-algebra. Spazi di misura, con esempi: la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{R}^n$, la misura banale nulla, la misura del conteggio, la misura concentrata in un punto. Prime proprietà delle misure: il vuoto ha misura nulla, additività finita, monotonia, passaggio al limite su successioni crescenti o decrescenti di insiemi, subadditività numerabile. Aritmetica nell'intervallo $[0, +\infty]$. Somma e prodotto di funzioni misurabili a valori in $[0, +\infty]$ sono misurabili. Definizione di integrale di una funzione semplice misurabile positiva. Lemmi sull'integrale delle funzioni semplici misurabili positive. Definizione dell'integrale delle funzioni misurabili positive. Prime proprietà.

Teoremi di passaggio al limite e integrale di funzioni di L^1. *Il teorema della convergenza monotona*. L'integrale di funzioni positive è additivo rispetto alla funzione, cioè $\int(f+g) = \int f + \int g$. *Il teorema di integrazione per serie di funzioni positive*. Interpretazione dell'integrale nel caso della misura del conteggio in termini di serie. *Il lemma di Fatou*. Interpretazione geometrica. La misura definita tramite $E \mapsto \int_E f\,d\mu$. Integrazione di funzioni di segno qualsiasi, usando parte positiva e negativa. Funzioni semiintegrabili e funzioni di L^1. Linearità dell'integrale su L^1. Integrale di funzioni di L^1 a valori complessi e sua linearità. La seminorma $\|f\|_1$. La disuguaglianza $|\int f| \le \int|f|$. Per quali f vale l'uguaglianza $|\int f| = \int|f|$? *Il teorema della convergenza dominata*. Esempio di applicazione: la continuità della funzione gamma. Proprietà vere quasi ovunque e uguaglianza quasi ovunque di funzioni misurabili. Funzioni misurabili definite quasi ovunque, e loro classi di equivalenza. Definizione di spazio di misura completo. Esempi di non completezza: uno spazio discreto, e lo spazio dei boreliani con la misura di Lebesgue. Teorema di completamento di uno spazio di misura. *Teorema di integrazione per serie se $\sum\|f_n\| < +\infty$*. Alcuni teoremi che si esprimono bene in termini di "quasi ovunque". Se $\sum\mu(E_n) < +\infty$ allora quasi tutti i punti appartengono a soltanto un numero finito di E_n. Esercizi sulla misura e integrazione astratta.

Spazi L^p

Disuguaglianze di convessità. Richiami sulle funzioni convesse. Combinazione convessa di due vettori, insiemi convessi in uno spazio vettoriale, epigrafico di una funzione a valori reali, definizione di funzione convessa in termini di epigrafico. Definizione di funzione convessa di una variabile reale in termini algebrici. Condizioni equivalenti in termini di rapporti incrementali. Condizioni equivalenti nel caso di funzioni derivabili una o due volte. Le funzioni convesse sono continue nei punti interni dell'intervallo di definizione. Le funzioni convesse hanno derivata destra e sinistra finite in ogni punto interno. Una funzione è convessa su un intervallo se e solo se il rapporto incrementale è debolmente crescente rispetto a ciascuna delle variabili. Posizione del grafico di una funzione convessa rispetto alle rette (semi)tangenti. *La disuguaglianza di Jensen.* Interpretazione geometrico-meccanica della disuguaglianza di Jensen: se abbiamo una distribuzione di massa sul grafico di una funzione convessa, il baricentro è al di sopra del grafico. Disuguaglianze di convessità: disuguaglianza fra media aritmetica e geometrica. Disuguaglianze fra medie aritmetiche e geometriche pesate. Disuguaglianza di Young. *Le disuguaglianze di Hölder e di Minkowski.* Cenno alle funzioni strettamente convesse, e quando vale l'uguaglianza nelle disuguaglianze di Hölder e Minkowski.

Spazi L^p. Le norme $\|f\|_p$ per $1 \le p < +\infty$. Maggioranti essenziali, estremo superiore essenziale e norma $\|f\|_\infty$. Gli spazi normati $L^p(\mu)$ per $1 \le p \le +\infty$. Successioni a variazione limitata in uno spazio metrico. Ogni successione di Cauchy ha una sottosuccessione a variazione limitata. Uno spazio metrico è completo se e solo se ogni successione a variazione limitata converge. *Il teorema di completezza di L^p* per $1 \le p \le +\infty$. Ogni successione a variazione limitata in L^p ha una sottosuccessione che converge quasi ovunque. Confronto fra convergenza puntuale quasi ovunque, convergenza in L^1, convergenza dominata, variazione limitata, convergenza uniforme. Confronto fra convergenza in L^1 e in L^2. Se $p_1 < p_2 < p_3$ allora $L^{p_1} \cap L^{p_3} \subset L^{p_2}$. La funzione $p \mapsto \log\|f\|_p^p$ è convessa. L'insieme dei p tali che $f \in L^p$ è un intervallo. Gli spazi $\ell^p(A)$ e $\ell^p(\mathbb{N})$. Sottinsiemi densi notevoli di $L^p(\mathbb{R}^n)$: l'insieme delle funzioni continue a supporto compatto.

Spazi di Hilbert, ortogonalità, serie di Fourier

Spazi di Hilbert e il teorema della minima distanza. Spazi vettoriali complessi con prodotto scalare: assiomi e prime proprietà. La disuguaglianza di Schwarz. La norma indotta da un prodotto scalare. La norma e il prodotto scalare sono funzioni continue. Spazi di Hilbert. L'identità del parallelogrammo. *Il teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.*

Proiezione ortogonale su un sottospazio chiuso. Ortogonalità fra vettori, sottospazio ortogonale a un vettore e a un insieme. *Il teorema della decomposizione ortogonale di uno spazio di Hilbert.* Lemma: *in uno spazio normato, il sottospazio vettoriale generato aggiungendo un vettore a un sottospazio chiuso è pure chiuso.* I sottospazi a dimensione finita sono chiusi. La formula della proiezione ortogonale di un vettore su un sottospazio a dimensione finita, data una base ortonormale del sottospazio.

Sommabilità di una famiglia di vettori. Definizione di sommabilità di una somma infinita in uno spazio normato. Condizione di Cauchy per la sommabilità. La sommabilità nel caso della dimensione finita e in quella infinita, e confronto con la convergenza assoluta e con la convergenza delle somme parziali. Una famiglia ortogonale di vettori $\{x_\alpha \mid \alpha \in A\}$ in uno spazio di Hilbert è sommabile se e solo se $\sum\|x_\alpha\|^2 < +\infty$, e in tal caso $\|\sum x_\alpha\|^2 = \sum\|x_\alpha\|^2$.

Sistemi ortonormali e basi hilbertiane. Lemma sulla distanza fra due punti di un convesso. *La formula della proiezione ortogonale sulla chiusura del sottospazio generato da una famiglia ortonormale anche non finita.* Coefficienti di Fourier $\hat{x}(\alpha)$ di un vettore rispetto a un sistema ortonormale. L'applicazione

$x \to \hat{x}$ è lineare, continua e suriettiva da H a $\ell^2(A)$. Sistemi ortonormali massimali, o basi hilbertiane. *Varie caratterizzazioni delle basi hilbertiane.* Identità di Bessel e di Parseval. Il problema dell'esistenza di basi hilbertiane di uno spazio di Hilbert. Esistenza in astratto usando l'assioma di scelta (a grandi linee). Esistenza costruttiva per spazi separabili (a grandi linee). Dimensione hilbertiana. Cenno alle ondine (wavelets) di Haar come base hilbertiana di $L^2(\mathbb{R})$.

Serie di Fourier. Il cerchio unitario $\mathbb{U}$ dei numeri complessi con la struttura di spazio di misura indotta dall'esponenziale complesso $t \mapsto e^{it}$. La corrispondenza degli integrali $\int_{\mathbb{U}} F\, d\mu = \int_{[0,2\pi]} F(e^{it})dt/(2\pi)$. Lo spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{U})$ e la sua base hilbertiana $u_n(z) = z^n$ per $n \in \mathbb{Z}$ (dimostrazione soltanto dell'ortonormalità). *Calcolo dei coefficienti di Fourier dell'onda quadra e dell'onda a dente di sega. Le serie notevoli $\sum 1/n^2$ e $\sum 1/(2n+1)^2$ calcolate applicando l'identità di Bessel.*

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

1. Il teorema della convergenza monotona.
2. Il lemma di Fatou, con esempio di disuguaglianza stretta.
3. Il teorema della convergenza dominata.
4. Il teorema di integrazione per serie $\int \sum f_n = \sum \int f_n$ nelle ipotesi che $f_n \geq 0$ oppure che $\sum \|f_n\|_1 < +\infty$.
5. La disuguaglianza di Jensen.
6. Le disuguaglianze di Hölder e di Minkowski.
7. Teorema di completezza di L^p.
8. Il teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.
9. La decomposizione di uno spazio di Hilbert nella somma diretta fra un sottospazio chiuso e il suo ortogonale.
10. In uno spazio normato, aggiungendo un vettore a un sottospazio chiuso, il sottospazio generato è ancora chiuso.
11. La formula della proiezione ortogonale sulla chiusura del sottospazio generato da una famiglia ortonormale anche non finita.
12. Caratterizzazioni delle basi hilbertiane.
13. Calcolo dei coefficienti di Fourier dell'onda quadra e dell'onda a dente di sega, con le serie notevoli che ne seguono.

Corso di Laurea Magistrale in Matematica Istituzioni di Analisi Superiore - Parte II, a.a. 2010–2011

F. Zanolin,
Università degli Studi di Udine,
Dipartimento di Matematica e Informatica,
via delle Scienze 206, 33100–Udine
e.mail: fabio.zanolin@uniud.it

NOTA: Per i teoremi o le proprietà evidenziati in **grassetto** è richiesta la dimostrazione all'esame.

1 Spazi topologici, spazi metrici e spazi normati

Richiami sugli spazi reali normati, gli spazi di Banach, gli spazi vettoriali con prodotto scalare e gli spazi di Hilbert.

Compattezza sequenziale e compattezza per ricoprimenti. Loro equivalenza negli spazi metrici. Richiami sulla compattezza negli spazi topologici e negli spazi metrici. Lemma di Cantor ("forte") per gli spazi compatti (intersezione non vuota di una successione decrescente di chiusi non vuoti in un compatto). Caratterizzazione dei compatti (e definizioni equivalenti) nel caso degli spazi metrici. Il **Teorema di Tychonov** sul prodotto di spazi topologici compatti.

Applicazioni lineari e continue fra spazi normati (operatori e funzionali). Lo spazio $\mathcal{L}(X,Y)$ delle applicazioni lineari e continue da X in Y (sua completezza se Y è completo). **Caratterizzazione delle applicazioni lineari e continue fra spazi normati e norma di un'applicazione lineare e continua**. Lo spazio duale topologico X^* e la sua completezza. Notazione $\langle f,x\rangle = f(x)$ e proprietà della relazione di bilinearità

$$X^* \times X \to \mathbb{R}, \quad (f,x) \mapsto \langle f,x\rangle.$$

Relazioni di finezza fra norme e norme equivalenti. Caratterizzazione dei compatti negli spazi normati di dimensione finita ed equivalenza di tutte le norme che rendono spazio normato uno spazio di dimensione finita. **Lemma di Riesz dell'elemento quasi ortogonale** e **dimostrazione che in uno spazio di dimensione infinita la sfera unitaria non è mai compatta**.

2 Il teorema di Hahn - Banach e alcune sue applicazioni

Il **teorema di Hahn - Banach**. Variante del teorema di Hahn - Banach al caso dell'estensione di un funzionale lineare invariante rispetto ad un semigruppo Abeliano di operatori lineari. Alcune applicazioni: esistenza di un limite generalizzato in ℓ^∞ (limite di Banach) ed esistenza di una misura finitamente additiva e invariante per traslazioni che estenda la misura di Lebesgue a tutti i sottoinsiemi limitati di $\mathbb{R}$ (riassunto dei passi principali della dimostrazione). Collegamento con l'esempio di Vitali di un sottoinsieme di $[0,1]$ non misurabile secondo Lebesgue e sue implicazioni per quanto riguarda le misure numerabilmente (rispettivamente finitamente) additive invarianti per traslazioni e che estendono la misura degli intervalli.

Estensione mediante il teorema di Hahn - Banach di un funzionale lineare e continuo definito su un sottospazio in modo da preservare la norma del funzionale. Esistenza, per ogni $x_0 \in X$ e $x_0 \neq 0$, di un funzionale lineare e continuo f tale che $||f|| = 1$ e $\langle f, x_0\rangle = ||x_0||$. Verifica della proprietà $||x|| = \sup\{|\langle f,x\rangle| \,:\, ||f|| \leq 1\}$. Spazio biduale X^{**} ed immersione di X in X^{**} data da $J : X \ni x \mapsto \phi_x \in X^{**}$, con $\langle \phi_x, f\rangle := \langle f,x\rangle$. Definizione di spazio riflessivo e completezza degli spazi riflessivi. Esempi di spazi di funzione riflessivi (senza dimostrazione).

Richiamo del teorema della proiezione su un chiuso e convesso di uno spazio di Hilbert e proprietà dell'operatore di proiezione, con applicazioni.

Elemento di minima norma per un chiuso e convesso. Esistenza ed unicità negli spazi di Hilbert. Esempi in cui non vi è esistenza o non vi è unicità. **Teorema di rappresentazione di Riesz dei funzionali lineari e continui** in uno spazio di Hilbert. Riflessività degli spazi di Hilbert.

3 Cenno ad alcuni teoremi di punto fisso

Mollificatori e approssimazione (nella topologia della convergenza uniforme sui compatti) delle funzioni continue $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ con funzioni di classe C^∞.

Il teorema di punto fisso di Brouwer (dimostrato a lezione per la palla chiusa unitaria di $\mathbb{R}^n$. La dimostrazione non è richiesta all'esame). Estensione del teorema di Brouwer ai chiusi, limitati e convessi di uno spazio normato di dimensione finita. Alcuni teoremi equivalenti al teorema di Brouwer: teorema di Rothe, teorema di Poincaré - Bohl, Teorema di Poincaré - Miranda sugli zeri dei campi vettoriali continui, Qualche esempio di applicazione del teorema di Brouwer.

Operatori compatti e completamente continui. Il **teorema di punto fisso di Schauder** (con dimostrazione) e sue diverse versioni negli spazi normati (per un operatore compatto su un chiuso e convesso e per un operatore continuo su un compatto convesso). Alcuni controesempi (di Kakutani e di Leray) che mostrano come il teorema di Brouwer non sia in generale estendibile agli spazi di dimensione infinita con la sola ipotesi di continuità. Alcune conseguenze e varianti del teorema di Schauder: teorema di Rothe, teorema di continuazione di Leray - Schauder, lemma sulle maggiorazioni a priori.

Lo spazio di Banach delle funzioni continue definite su uno spazio metrico compatto e a valori in $\mathbb{R}^N$. Norma $|| \cdot ||_\infty$. Il teorema di Ascoli - Arzelá (richiamato senza dimostrazione in quanto già visto in un altro corso) e dimostrazione di alcune sue applicazioni o varianti. Alcune applicazioni del teorema di Schauder utilizzando il teorema di Ascoli - Arzelà: **Teorema di esistenza locale di Peano per il problema di Cauchy** $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$. Studio del problema dei due punti:

$$\begin{cases} u'' + f(t, u, u') = 0, & t \in [a, b] \\ u(a) = 0, \;\; u(b) = 0. \end{cases}$$

e teorema di Scorza - Dragoni (nel caso in cui f sia limitata (non è richiesta la dimostrazione all'esame).

4 Alcuni teoremi fondamentali degli spazi di Banach

Definizione di categoria secondo Baire. Lemma di Cantor negli spazi metrici completi (versione con una successione decrescente di chiusi aventi diametro convergente a zero) negli spazi metrici completi. **Teorema di Baire** (sull'intersezione numerabile di aperti e densi di uno spazio metrico completo) e proprietà degli spazi metrici completi di essere di seconda categoria. Alcune applicazioni elementari del concetto di categoria secondo Baire ai sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Cenno alle funzioni di Weierstrass continue e mai derivabili su un intervallo. **Teoremi di uniforme limitatezza e di Banach - Steinhaus** (nella versione delle funzioni da uno spazio completo a valori in $\mathbb{R}$ e nella versione degli operatori lineari e continui) con applicazioni (convergenza puntuale di successioni di operatori continui e di funzionali). Limitatezza di un sottoinsieme di X o di X^* dalla limitatezza delle sue valutazioni attraverso elementi di X^* e di X, rispettivamente.

Teorema della mappa aperta e **teorema del grafico chiuso**. Alcune conseguenze: Continuità dell'inverso di un operatore lineare, continuo e biettivo fra spazi di Banach, equivalenza di due norme che rendano completo un medesimo spazio vettoriale e che siano fra loro confrontabili, **Teorema di Hellinger - Toeplitz**.

5 Topologie deboli

Descrizione delle topologie deboli come le topologie meno fini che rendono continue tutte le applicazioni di una certa classe e definizione degli aperti di base per tali topologie. Caratterizzazione delle funzioni continue da uno spazio arbitrario ad uno dotato di topologia debole. Convergenza per successioni rispetto ad una topologia debole. **Principali proprietà della convergenza debole: forte implica debole, unicità del limite, limitatezza, semicontinuità della norma**. Richiami sullo spazio prodotto cartesiano di una famiglia arbitraria di spazi topologici e sulla topologia prodotto come un caso particolare di topologia debole. Convergenza debole e topologia debole $\sigma(X, X^*)$ in uno spazio X e loro principali proprietà. Convergenza debole e topologia debole $\sigma(X^*, X^{**})$. Convergenza debole* e topologia debole* $\sigma(X^*, X)$. **Dimostrazione che la topologia forte e quella debole coincidono negli spazi di dimensione finita** e sono sempre diverse se la dimensione di X non è finita. Cenno alla chiusura forte ed alla chiusura debole di un insieme, con qualche esempio: **chiusura rispetto alla topologia debole della frontiera di una palla in uno spazio di dimensione infinita**. **Teorema di Banach - Alaoglu sulla compattezza della palla unitaria chiusa di X^* per la topologia debole***. Applicazioni della teoria al caso degli spazi riflessivi e agli spazi di Hilbert (cenno all'esistenza di elementi di minima norma). Esempio di una successione di norma costante in L^2 che converge debolmente a zero.

Riferimenti bibliografici

[1] H. Brezis, *Analisi funzionale. Teoria e applicazioni*, Liguori, Napoli, 1986.

[2] H.L. Royden, *Real Analysis*, (Third Edition), Macmillan, New York, 1988.

[3] M. Trombetta, F. Zanolin, *Analisi Matematica 7*, Note aggiornate del corso, Udine 2008 (disponibili in rete sul sito del materiale didattico, oppure fornite direttamente dal docente (su richiesta) via e.mail).