CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
ANALISI MATEMATICA 6, A.A. 2009–2010
PRIMA PARTE DEL CORSO

F. ZANOLIN,
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE,
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA,
VIA DELLE SCIENZE 206, 33100–UDINE
E.MAIL: FABIO.ZANOLIN@DIMI.UNIUD.IT

Gli argomenti del corso sono stati tratti dai seguenti libri (disponibili presso la Biblioteca di Scienze dell'Università di Udine):
[1] **K.J. Falconer**: *The geometry of fractal sets*, Cambridge University Press, Cambridge 1985.
[2] **H.L. Royden**: *Real Analysis*, MacMillan Publishing Co., New York, 1988.
[3] **W. Rudin**: *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York 1970

Principali argomenti svolti a lezione

Introduzione all'integrale di Lebesgue, mettendo in evidenza alcune difficoltà connesse all'uso di passaggio al limite sotto il segno di integrale per l'integrale di Riemann. Definizione di σ-algebra. Famiglia dei Boreliani in uno spazio topologico. Funzioni misurabili a valori in uno spazio topologico e a valori in $\mathbb{R}$, in $\mathbb{C}$ o nella retta ampliata.
Proprietà delle funzioni misurabili (somma, prodotto, composizione con una funzione continua). Limite superiore e limite inferiore di una successione di funzioni misurabili. Parte positiva, parte negativa e valore assoluto di una funzione misurabile. Funzioni caratteristiche. Funzioni semplici (misurabili).
Funzioni misurabili a valori in $[0, \infty]$. Teorema di approssimabilità mediante una successione monotona di funzioni semplici.
Misure $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$, con $\mathcal{M}$ una σ-algebra di sottoinsiemi di un insieme X. Proprietà di una misura. Teoremi sui limiti $\mu(A_n)$ con A_n una successione monotona (crescente o decrescente) di insiemi misurabili.
Integrazione astratta di una funzione $f : X \to [0, \infty]$ rispetto ad una misura μ su X. Definzione di integrale (di Lebesgue) per una funzione semplice e per una funzione f misurabile. Teoremi sull'integrale. Misura definita da $\phi(E) = \int_E s\, d\mu$, con $s \geq 0$ una funzione semplice (misurabile).

Teorema di convergenza monotona (Beppo Levi) e sua applicazione all'integrazione di una serie di funzioni misurabili non-negative. Lemma di Fatou. Misura definita da $\phi(E) = \int_E f\, d\mu$, con $f \geq 0$ una funzione misurabile.
Funzioni con $\int_X |f|\, d\mu < \infty$ e spazio $L^1(\mu)$. Funzioni a valori in $\mathbb{R}$ integrabili secondo Lebesgue rispetto ad una misura μ. Linearità dell'integrale e disuguaglianza del valore assoluto.
Teorema di Lebesgue della convergenza dominata. Esempi per cui il risultato non vale se si toglie l'ipotesi della maggiorazione uniforme, di tutte le funzioni della successione, con una funzione integrabile.
Insiemi di misura nulla. Proprietà "quasi ovunque". Misure complete e completamento di una misura. Funzioni non-negative a integrale nullo.
Teorema per cui se $\sum_{i=1}^{\infty} \int_X |f_n|\, d\mu < \infty$, allora la serie $\sum_{i=1}^{\infty} f_n(x)$ converge quasi ovunque in X ad una funzione $f \in L^1(\mu)$ e $\int_X f\, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_X f_n\, d\mu$.
Misura esterna e sue proprietà. Definizione di Carathéodory di insieme misurabile rispetto ad una misura esterna fissata ν e teorema per cui gli insiemi misurabili secondo Carathéodory costituiscono una σ-algebra $\mathcal{M}$ e ν ristretta a $\mathcal{M}$ è una misura (completa).
Misure esterne metriche. Misurabilità dei Boreliani rispetto ad una misura esterna metrica.
Misura di Lebesgue in $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$. Alcune proprietà principali della misura di Lebesgue. Esempio di Vitali di insieme non misurabile secondo Lebesgue.
Integrabilità secondo Lebesgue di ogni funzione limitata su un intervallo limitato ed ivi integrabile secondo Riemann.
Misura di Hausdorff. Dimensione di Hausdorff. Alcuni esempi di insiemi autosimili e calcolo della dimensione di Hausdorff.

Teoremi per i quali è richiesta la dimostrazione all'esame:

- Teoremi di continuità per una misura: $\lim \mu(A_n)$ con A_n una successione monotona di insiemi misurabili.
- Proprietà di σ-algebra per la famiglia degli insiemi misurabili secondo Carathéodory (a partire da una misura esterna).
- Misurabilità dei Boreliani per una misura esterna metrica.
- Teorema di approssimabilità di una funzione misurabile a valori in $[0, \infty]$ con una successione monotona di funzioni semplici.
- Teorema di convergenza monotona (Beppo Levi) con applicazione alle serie di funzioni.
- Lemma di Fatou.
- Teorema di Lebesgue della convergenza dominata, con alcune applicazioni.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2009/2010

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea triennale e specialistico in Matematica

Analisi Matematica 6, secondo modulo

Programma Dettagliato

Prof. Gianluca Gorni

Testi di riferimento: Walter Rudin, Analisi Reale e Complessa, Boringhieri. Giuseppe De Marco, *Analisi Due* (prima edizione), Decibel-Zanichelli, capitolo II.18. Materiale didattico attinente al corso è anche disponibile presso

`http://www.dimi.uniud.it/gorni/Istituzioni`

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

Spazi L^p, Spazi di Hilbert, Serie di Fourier

Disuguaglianze di convessità. Richiami sulle funzioni convesse: definizione, continuità all'interno, esistenza delle derivate sinistre e destre, che sono finite all'interno, posizione del grafico rispetto alle rette tangenti (sinistre o destre), relazioni con la monotonia della derivata e il segno della derivata seconda, quando esistono. *La disuguaglianza di Jensen.* Disuguaglianze di convessità: disuguaglianza fra media aritmetica e geometrica (semplici o pesate), disuguaglianza di Young. Esponenti coniugati, propri e impropri.

Spazi L^p. *Disuguaglianze di Hölder e di Minkowski.* Gli spazi normati L^p per $1 \le p < +\infty$. Maggioranti essenziali ed estremo superiore essenziale di funzioni reali misurabili su uno spazio di misura. Lo spazio L^∞. Le disuguaglianze di Hölder e Minkowski in termini di norme L^p. Successioni a variazione finita in uno spazio metrico. Le successioni a variazione finita sono di Cauchy. Da ogni successione di Cauchy si può estrarre una sottosuccessione a variazione finita. Uno spazio metrico è completo se e solo se ogni successione a variazione limitata converge. La norma in L^p è numerabilmente subadditiva: $\|\sum_n f_n\|_p \le \sum_n \|f_n\|_p$ se $\sum_n f_n$ converge puntualmente. *Il teorema di completezza di L^p* come spazio metrico. Interpretazione geometrica delle norme e delle distanze in L^1 e in L^2. Confronto fra le convergenze in L^1, in L^2, in L^∞. Esercizi: la funzione $p \mapsto \log \|f\|_p^p$ è convessa, cenno al limite della norma in L^p per $p \to +\infty$. Funzioni continue a supporto compatto. L'insieme delle funzioni semplici misurabili e nulle al di fuori di un insieme di misura finita è denso in $L^p(\mu)$ se $1 \le p < +\infty$. L'insieme delle funzioni continue a supporto compatto su $\mathbb{R}^N$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^N)$ se $1 \le p < +\infty$ (senza dimostrazione).

Spazi di Hilbert e ortogonalità. Spazi vettoriali complessi con prodotto scalare: definizione e prime proprietà. Disuguaglianza di Schwarz. La disuguaglianza triangolare. La norma indotta da un prodotto scalare. Identità del parallelogrammo e ricostruzione del prodotto scalare a partire dalla norma. Definizione di spazio di Hilbert. Esempi di spazi di Hilbert. Continuità del prodotto scalare e della norma. Vettori ortogonali e spazio ortogonale a un insieme. Insiemi convessi in uno spazio vettoriale. *Il teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.* Esempi di non unicità nel caso di spazi normati. *Decomposizione di uno spazio di Hilbert in somma diretta di un sottospazio chiuso più l'ortogonale*, e relative proiezioni ortogonali. *In uno spazio normato, aggiungendo un vettore a un sottospazio chiuso, il sottospazio generato è ancora chiuso.* I sottospazi a dimensione finita sono chiusi.

Sistemi ortonormali, somme infinite di vettori, proiezioni ortogonali e basi hilbertiane. Sistemi ortonormali. *La formula della proiezione ortogonale sul sottospazio generato da un sistema ortonormale finito.* Somme infinite di vettori in spazi normati: definizione di sommabilità e di condizione di Cauchy. Se una somma è di Cauchy allora l'insieme di indici con vettore non nullo è al più numerabile. Se una somma è sommabile allora è di Cauchy. Se lo spazio è completo e la somma è di Cauchy allora è sommabile (dimostrazione a grandi linee). Somme infinite in dimensione 1 e in dimensione finita, e relazioni con gli spazi $\ell^p(A)$. Somme infinite in dimensione infinita: la convergenza assoluta è sufficiente per la sommabilità, ma non necessaria. *Se i vettori x_α sono a 2 a 2 ortogonali in uno spazio di Hilbert, allora $\sum_\alpha x_\alpha$ è sommabile se e solo se $\sum_\alpha \|x_\alpha\|^2 < +\infty$.* Un lemma sulla distanza di un punto da un convesso in uno spazio con prodotto scalare. *La formula della proiezione ortogonale di un vettore sulla chiusura del sottospazio generato da un sistema ortonormale anche non finito.* Dato un sistema ortonormale $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$, a ogni vettore $x \in H$ si associa la funzione $\hat{x}(\alpha) := \langle x, u_\alpha \rangle$ da A in $\mathbb{C}$ (coefficienti di Fourier di x rispetto al sistema ortnonormale). L'applicazione $x \mapsto \hat{x}$ risulta lineare, non espansiva, e suriettiva da H su $\ell^2(A)$. Suriettività: *dato un sistema ortonormale $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ e un $a \in \ell^2(A)$ esiste un $x \in H$ tale che $\langle x, u_\alpha \rangle = a_\alpha$ per ogni α.* Sistemi ortonormali massimali, o basi hilbertiane. *Caratterizzazioni delle basi hilbertiane.* Identità di Bessel e di Parseval. Confronto fra basi hilbertiane e basi vettoriali (cenno). Esistenza di basi hilbertiane di uno spazio di Hilbert generico (cenno). Spazi separabili, e basi hilbertiane numerabili (cenno). Basi hilbertiane di spazi concreti (cenno).

Serie di Fourier trigonometriche. Il cerchio unitario $\mathbb{U}$ di $\mathbb{C}$ e la sua misura angolare normalizzata: definizione tramite la mappa $t \mapsto e^{it}$ e la misura di Lebesgue sulla retta. Visualizzazione delle funzioni reali su $\mathbb{U}$. Integrazione di funzioni sul cerchio unitario. Lo spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{U})$. La base hilbertiana classica di $L^2(\mathbb{U})$ definita dalle potenze: $u_n(z) := z^n$. Il sistema $\{u_n : n \in \mathbb{Z}\}$ è ortonormale (con verifica) e massimale (senza dimostrazione). La base hilbertiana trigonometrica. Coefficienti e serie di Fourier e convergenza in $L^2(\mathbb{U})$. *Calcolo dei coefficienti di Fourier dell'onda quadra. Uso dell'identità di Bessel per dedurre la formula notevole $\pi^2/8 = 1/1^2 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + \ldots$.* Calcolo della serie di Fourier dell'onda a dente di sega. La serie $\pi^2/6 = 1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \cdots$. Cenno alla funzione zeta di Riemann e al problema della somma dei reciproci delle terze potenze. Calcolo della serie di Fourier della funzione $f(e^{it}) = t^2$ se $-\pi < t \le \pi$. La serie $\pi^4/90 = 1/2^4 + 1/3^4 + 1/4^4 + \cdots$.

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

1. La disuguaglianza di Jensen.
2. Le disuguaglianze di Hölder e di Minkowski.
3. Teorema di completezza di L^p.
4. Il teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.
5. La decomposizione di uno spazio di Hilbert nella somma diretta fra un sottospazio chiuso e il suo ortogonale.
6. In uno spazio normato, aggiungendo un vettore a un sottospazio chiuso, il sottospazio generato è ancora chiuso.
7. Se i vettori x_α sono a 2 a 2 ortogonali in uno spazio di Hilbert, allora $\sum_\alpha x_\alpha$ è sommabile se e solo se $\sum_\alpha \|x_\alpha\|^2 < +\infty$.
8. La formula della proiezione ortogonale sulla chiusura del sottospazio generato da una famiglia di vettori ortonormali in uno spazio di Hilbert: caso finito e caso infinito.
9. Dato un sistema ortonormale $\{u_\alpha \ : \ \alpha \in A\}$ in uno spazio di Hilbert H e un $a \in \ell^2(A)$ esiste un $x \in H$ tale che $\langle x, u_\alpha \rangle = a_\alpha$ per ogni α.
10. Varie caratterizzazioni delle basi hilbertiane.
11. Calcolo dei coefficienti di Fourier dell'onda quadra e la serie notevole $\pi^2/8 = 1/1^2 + 1/3^2 + 1/5^2 + \cdots$