Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 6
Programma Dettagliato

Prof. Gianluca Gorni

Testi di riferimento: Walter Rudin, Analisi Reale e Complessa, Boringhieri. Giuseppe De Marco, *Analisi Due* (prima edizione), Decibel-Zanichelli, capitolo II.18. Materiale didattico attinente al corso è anche disponibile presso

`http://www.dimi.uniud.it/gorni/Istituzioni`

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

Regolamento d'esame: L'esame consiste di uno scritto e di un orale. Gli scritti possono essere ripetuti senza limitazioni, ma ogni scritto consegnato annulla i precedenti. Chi ha superato lo scritto a un appello può dare l'orale in qualsiasi appello, o anche su appuntamento individuale.

Misura e integrazione astratta e spazi L^p

σ-algebre e funzioni misurabili. Gli assiomi delle σ-algebre, degli spazi misurabili e delle funzioni misurabili, confrontati in parallelo con gli assiomi degli spazi topologici e delle funzioni continue. Prime conseguenze degli assiomi: le σ-algebre sono invarianti per unioni e intersezioni finite o numerabili, e per differenze. Lemma topologico: un aperto di $\mathbb{R}^2$ è l'unione di una famiglia numerabile di rettangoli. *Una funzione a valori in $\mathbb{R}^N$ è misurabile se e solo se tutte le componenti sono misurabili.* Somma e prodotto di funzioni misurabili reali o complesse sono misurabili. La funzione caratteristica di un insieme. Una funzione caratteristica è misurabile se e solo se l'insieme è misurabile. Esempi di σ-algebre: la discreta, l'indiscreta, le σ-algebre su insiemi di 0, 1, 2 e 3 elementi. Cenno al numero di σ-algebre su un insieme finito di n elementi. Data una famiglia di sottinsiemi di X, esiste la minima σ-algebra su X che contiene la famiglia. Cenno alla "costruzione" della σ-algebra generata da una famiglia di insiemi. La famiglia dei boreliani di uno spazio topologico. Esempi di boreliani di $\mathbb{R}$: intervalli chiusi o semiaperti. Funzioni boreliane fra spazi topologici. *La famiglia dei boreliani di $\mathbb{R}$ e dei reali estesi $[-\infty, +\infty]$ è generata in alternativa dagli aperti, dai chiusi, dagli intervalli aperti, dalle semirette aperte.* Composizione di una funzione misurabile con una boreliana è misurabile. Richiami sul massimo e minimo limite di una successione di numeri reali (estesi). *Data una successione di funzioni misurabili a valori reali estesi, anche gli estremi inferiori e superiori e i massimi e minimi limiti sono misurabili.* Se una successione di funzioni misurabili converge puntualmente, la funzione limite è pure misurabile. Esercizi sulle funzioni misurabili. La parte positiva e la parte negativa di un numero reale o di una funzione reale. Funzioni semplici. Le funzioni semplici reali o a valori in uno spazio vettoriale sono quelle che si possono scrivere (in modo non unico) come combinazione lineare di funzioni caratteristiche. Funzioni semplici misurabili. *Teorema della discretizzazione: una funzione positiva misurabile è sempre il limite puntuale di una successione crescente di funzioni semplici misurabili positive.* Una funzione f reale positiva è misurabile se e solo se $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{-n}\chi_{E_n}$, con E_n misurabile.

Misura e integrazione astratta. Gli assiomi delle misure positive su una σ-algebra. Spazi di misura, con esempi: la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{R}^n$, la misura banale nulla, la misura del conteggio ("counting measure"), la misura concentrata in un punto. Prime proprietà delle misure: il vuoto ha misura nulla, additività finita, monotonia, passaggio al limite su successioni crescenti o decrescenti di insiemi, subadditività numerabile. L'aritmetica nella semiretta estesa $[0,+\infty]$ e la convenzione $+\infty\cdot 0 = 0$. La somma e il prodotto di due funzioni misurabili a valori in $[0,+\infty]$ è misurabile. La definizione di integrale per funzioni semplici positive. Lemmi: se s vale la costante c su E, allora $\int_E c\,d\mu = c\mu(E)$; la funzione $E \mapsto \int_E s\,d\mu$ è una misura; $\int_E (s+t)d\mu = \int_E s\,d\mu + \int_E t\,d\mu$; $\int_E s\,d\mu = \int_X s\chi_E\,d\mu$; se $s \le t$ su E, allora $\int_E s\,d\mu \le \int_E t\,d\mu$. Definizione di integrale per una funzione misurabile positiva. Prime proprietà dell'integrale di funzioni misurabili positive: monotonia rispetto alla funzione e all'insieme, è nullo se e solo se la funzione è quasi ovunque nulla, $\int cf = c\int f$.

I teoremi di convergenza per l'integrale. *Il teorema della convergenza monotona. Additività dell'integrale per funzioni misurabili positive. Integrazione per serie di funzioni positive.* L'integrazione di funzioni positive su $\mathbb{N}$ rispetto alla misura del conteggio equivale alla somma della serie. *Lemma di Fatou. Esempi di disuguaglianza stretta nel lemma di Fatou.* Se $f \ge 0$ è misurabile allora $\varphi\colon E \mapsto \int_E f\,d\mu$ è una misura, e $\int g\,d\varphi = \int gf\,d\mu$. Corollario al lemma di Fatou: se $0 \le f_n \to f$ e $\int f = +\infty$ allora $\int f_n \to +\infty$. Applicazione: comportamento della funzione $\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ per $x \to 0^+$. Integrazione di funzioni misurabili reali a segno qualsiasi: funzioni semiintegrabili e funzioni sommabili. Funzioni integrabili a valori complessi e relativa definizione di integrale. Lo spazio $L^1(\mu)$. *Proprietà dell'integrale su $L^1(\mu)$: additività*, linearità, monotonia (nel caso reale), $|\int f| \le \int |f|$. La seminorma $\|f\|_1 := \int_X |f|d\mu$ su $L^1(\mu)$. Come si può ottenere una norma quozientando lo spazio rispetto alla relazione di "uguaglianza quasi ovunque". *Il teorema della convergenza dominata.* Uguaglianza quasi ovunque e sue relazioni con la misurabilità. Spazi di misura completi e non completi, con esempi. Il completamento di uno spazio di misura. Funzioni definite quasi ovunque, loro algebra e loro integrazione. Lo spazio L^1 visto come insieme di classi di equivalenza di funzioni definite quasi ovunque. Il teorema di integrazione per serie di L^1: se $\sum \|f_n\|_1 < +\infty$ allora $\sum f_n$ converge quasi ovunque e in L^1. Alcuni teoremi in cui la tesi si esprime con un "quasi ovunque". Esercizi sull'integrazione astratta.

Confronto con l'integrale di Riemann. Richiami sull'integrale secondo Riemann: funzioni a gradino N-dimensionali, integrale inferiore e superiore di Riemann, integrabilità alla Riemann. Oscillazione di una funzione in un punto. Una funzione fra spazi metrici è continua in un punto se e solo se la sua oscillazione in quel punto è zero. *Teorema di Vitali-Lebesgue*: data una funzione su $\mathbb{R}^N$ che sia limitata e nulla fuori da un limitato, essa è integrabile secondo Riemann se e solo se è trascurabile l'insieme dei suoi punti di discontinuità; in tali casi è integrabile anche secondo Lebesgue ed gli integrali di Riemann e di Lebesgue coincidono.

Disuguaglianze di convessità. Richiami sulle funzioni convesse: definizione, continuità all'interno, esistenza delle derivate sinistre e destre, che sono finite all'interno, posizione del grafico rispetto alle rette tangenti (sinistre o destre), relazioni con la monotonia della derivata e il segno della derivata seconda, quando esistono. *La disuguaglianza di Jensen.* Disuguaglianze di convessità: disuguaglianza fra media aritmetica e geometrica (semplici o pesate), disuguaglianza di Young. Esponenti coniugati, propri e impropri.

Spazi L^p. *Disuguaglianze di Hölder e di Minkowski.* Gli spazi normati L^p per $1 \leq p < +\infty$. Maggioranti essenziali ed estremo superiore essenziale di funzioni reali misurabili su uno spazio di misura. Lo spazio L^∞. Le disuguaglianze di Hölder e Minkowski in termini di norme L^p. Successioni a variazione finita in uno spazio metrico. Le successioni a variazione finita sono di Cauchy. Da ogni successione di Cauchy si può estrarre una sottosuccessione a variazione finita. Uno spazio metrico è completo se e solo se ogni successione a variazione limitata converge. La norma in L^p è numerabilmente subadditiva: $\|\sum_n f_n\|_p \leq \sum_n \|f_n\|_p$ se $\sum_n f_n$ converge puntualmente. *Il teorema di completezza di L^p* come spazio metrico. Interpretazione geometrica delle norme e delle distanze in L^1 e in L^2. Confronto fra le convergenze in L^1, in L^2, in L^∞. Esercizi: la funzione $p \mapsto \log \|f\|_p^p$ è convessa, cenno al limite della norma in L^p per $p \to +\infty$.

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

1. Una funzione a valori in $\mathbb{R}^2$ è misurabile se e solo se le componenti sono misurabili.
2. La famiglia dei boreliani di $\mathbb{R}$ è generata in alternativa dagli aperti, dai chiusi, dagli intervalli aperti, dalle semirette aperte.
3. Data una successione di funzioni misurabili a valori reali estesi, anche gli estremi inferiori e superiori e i massimi e minimi limiti sono misurabili.
4. Teorema della discretizzazione: una funzione positiva misurabile è sempre il limite puntuale di una successione crescente di funzioni semplici misurabili positive.
5. Il teorema della convergenza monotona.
6. Additività dell'integrale per funzioni misurabili positive. Integrazione per serie di funzioni positive.
7. Il lemma di Fatou, con esempio di disuguaglianza stretta.
8. Additività dell'integrale su $L^1(\mu)$.
9. Il teorema della convergenza dominata.
10. Il teorema di Vitali-Lebesgue sull'integrabilità secondo Riemann.
11. La disuguaglianza di Jensen.
12. Le disuguaglianze di Hölder e di Minkowski.
13. Teorema di completezza di L^p.