Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2007/2008

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 6
Programma Dettagliato

Prof. Gianluca Gorni

Testi di riferimento: Walter Rudin, Analisi Reale e Complessa, Boringhieri. Giuseppe De Marco, *Analisi Due* (prima edizione), Decibel-Zanichelli, capitolo II.18. Materiale didattico attinente al corso è anche disponibile presso

http://www.dimi.uniud.it/gorni/Istituzioni

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

Regolamento d'esame: L'esame consiste di uno scritto e di un orale. Gli scritti possono essere ripetuti senza limitazioni, ma ogni scritto consegnato annulla i precedenti. Chi ha superato lo scritto a un appello può dare l'orale in qualsiasi appello, o anche su appuntamento individuale.

Misura e integrazione astratta

σ-algebre e funzioni misurabili. Definizione di σ-algebra, spazio misurabile, e funzione misurabile, in parallelo alle definizione di topologia e funzione continua. Prime proprietà: le σ-algebre sono stabili per intersezioni e unioni finite o numerabili, per complementi e per differenze. Se f è misurabile e g è continua, allora $g \circ f$ è misurabile. Richiamo: gli aperti di $\mathbb{R}^2$ sono unioni numerabili di rettangoli aperti. *Una funzione a valori in $\mathbb{R}^2$ è misurabile se e solo se le componenti sono misurabili.* Una funzione complessa è misurabile se e solo se lo sono la parte reale e quella immaginaria. Somma e prodotto di funzioni reali o complesse misurabili sono misurabili. Le possibili σ-algebre in un insieme di 1, 2 o 3 elementi. Cenno al numero di σ-algebre in un insieme di n elementi. La σ-algebra su X generata da una famiglia di sottinsiemi di X. Cenno alla "costruzione" della σ-algebra generata. L'insieme dei boreliani di uno spazio topologico. Gli intervalli semiaperti sono boreliani di $\mathbb{R}$. L'insieme dei boreliani di $\mathbb{R}$ è generato anche dai chiusi, o dagli intervalli aperti, o dagli intervalli aperti di estremi razionali. Ogni aperto di $\mathbb{R}$ è unione di una famiglia di intervalli aperti a due a due disgiunti. L'insieme dei boreliani di $\mathbb{R}$ è generato dalle semirette del tipo $[a, +\infty]$. L'insieme dei reali estesi $[-\infty, +\infty]$, la sua topologia e i suoi boreliani. Definizione di funzione boreliana fra spazi topologici. La funzione parte intera è boreliana sui reali. Se $(X_1, \mathcal{M}_1)$ è uno spazio misurabile e $f\colon X_1 \to X_2$, allora $\{E \subseteq X_2 : f^{-1}(E) \in \mathcal{M}_1\}$ è una σ-algebra su X_2. Una funzione è misurabile se e solo se la contrimmagine dei boreliani è misurabile. Una funzione f reale (estesa) è misurabile se e solo se $\{f > a\}$ è misurabile per ogni $a \in \mathbb{R}$. Composizione di una funzione misurabile con una boreliana è misurabile. Richiami su massimo e minimo limite di successioni reali (estese). Data una successione di funzioni misurabili a valori reali estesi, anche il sup, l'inf, il maxlim e il minlim della successione sono misurabili. L'insieme dei punti in cui una successione di funzioni misurabili converge è misurabile. L'insieme dei punti in cui due funzioni reali estese misurabili coincidono è misurabile. Discretizzazione binaria dell'insieme dei numeri reali. Se $f: X \to [0, +\infty]$ si equivalgono le condizioni: (a) f è misurabile, (b) f è il limite puntuale di una successione crescente di funzioni semplici misurabili positive, (c) $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{-n}\chi_{E_n}$, con E_n misurabile.

Misura e integrazione astratta. Gli assiomi delle misure positive su una σ-algebra. Spazi di misura, con esempi: la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{R}^n$, la misura banale nulla, la misura del conteggio, la misura concentrata in un punto. Prime proprietà delle misure: il vuoto ha misura nulla, additività finita, monotonia, passaggio al limite su successioni crescenti o decrescenti di insiemi, subadditività numerabile. L'aritmetica nella semiretta $[0, +\infty]$ e la convenzione $+\infty \cdot 0 = 0$. La somma e il prodotto di due funzioni misurabili a valori in $[0, +\infty]$ è misurabile. La definizione di integrale per funzioni semplici positive. Lemmi: se s vale c su E, allora $\int_E c\, d\mu = c\mu(E)$; la funzione $E \mapsto \int_E s\, d\mu$ è una misura; $\int_E (s+t) d\mu = \int_E s\, d\mu + \int_E t\, d\mu$; $\int_E s\, d\mu = \int_X s\chi_E\, d\mu$; se $s \le t$ su E, allora $\int_E s\, d\mu \le \int_E t\, d\mu$. Definizione di integrale per una funzione misurabile positiva. Prime proprietà dell'integrale di funzioni misurabili positive: monotonia rispetto alla funzione e all'insieme, è nullo se e solo se la funzione è quasi ovunque nulla, $\int cf = c\int f$. *Il teorema della convergenza monotona.* Additività dell'integrale per funzioni misurabili positive. Integrazione per serie di funzioni positive. L'integrazione di funzioni positive su $\mathbb{N}$ rispetto alla misura del conteggio equivale alla somma della serie. *Lemma di Fatou.* Esempi di disuguaglianza stretta nel lemma di Fatou. Se $f \ge 0$ è misurabile allora $\varphi: E \mapsto \int_E f\, d\mu$ è una misura, e $\int g\, d\varphi = \int gf\, d\mu$. Corollario al lemma di Fatou: se $0 \le f_n \to f$ e $\int f = +\infty$ allora $\int f_n \to +\infty$. Applicazione: comportamento della funzione $\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ per $x \to 0$ e per $x \to +\infty$. Integrazione di funzioni misurabili reali a segno qualsiasi: funzioni semiintegrabili e funzioni sommabili. Funzioni integrabili a valori complessi e relativa definizione di integrale. Lo spazio $L^1(\mu)$. Proprietà dell'integrale su $L^1(\mu)$: additività, linearità, monotonia (nel caso reale), $|\int f| \le \int |f|$. La seminorma $\|f\|_1 := \int_X |f| d\mu$ su $L^1(\mu)$. Come si può ottenere una norma quozientando lo spazio rispetto alla relazione di "uguaglianza quasi ovunque". *Il teorema della convergenza dominata.* Applicazione: continuità della funzione $\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ per $x > 0$. Uguaglianza quasi ovunque e sue relazioni con la misurabilità. Spazi di misura completi e non completi, con esempi. Il completamento di uno spazio di misura. Funzioni definite quasi ovunque, loro algebra e loro integrazione. Lo spazio L^1 visto come insieme di classi di equivalenza di funzioni definite quasi ovunque. Il teorema di integrazione per serie di L^1: se $\sum \|f_n\|_1 < +\infty$ allora $\sum f_n$ converge quasi ovunque e in L^1. Alcuni teoremi in cui la tesi si esprime con un "quasi ovunque". Esercizi sulla misura e integrazione astratta.

Confronto con l'integrale di Riemann. Relazione fra integrale alla Riemann e alla Lebesgue: funzioni a gradino, integrale inferiore e superiore di Riemann, integrabilità alla Riemann, oscillazione di una funzione e sue proprietà. *Teorema di Vitali-Lebesgue*: una funzione su $\mathbb{R}^N$ limitata e nulla fuori da un limitato è integrabile secondo Riemann se e solo se è misurabile secondo Lebesgue ed è trascurabile l'insieme dei suoi punti di discontinuità; in tali casi l'integrale di Riemann e Lebesgue coincidono. Esempi di funzioni integrabili secondo Lebesgue ma non secondo Riemann.

Spazi L^p

Disuguaglianze di convessità. Generalità sulle funzioni convesse: definizione, proprietà dei rapporti incrementali, continuità all'interno, esistenza delle derivate sinistre e destre, che sono finite all'interno, posizione del grafico rispetto alle rette tangenti (sinistre o destre), relazioni con la monotonia della derivata e il segno della derivata seconda, quando esistono. *La disuguaglianza di Jensen.* Disuguaglianze di convessità: disuguaglianza fra media aritmetica e geometrica, disuguaglianza di Young. Esponenti coniugati, propri e impropri.

Spazi L^p. *Disuguaglianze di Hölder e di Minkowski.* Gli spazi normati L^p per $1 \le p < +\infty$. Maggioranti essenziali ed estremo superiore essenziale di funzioni misurabili su uno spazio di misura. Lo spazio L^∞. Le disuguaglianze di Hölder e Minkowski in termini di norme L^p. Successioni a variazione limitata in uno spazio metrico. Da ogni successione di Cauchy si può estrarre una sottosuccessione convergente. Uno spazio metrico è completo se e solo se ogni successione a variazione limitata converge. *Il teorema di completezza di L^p* come spazio metrico. Confronto fra convergenza puntuale quasi ovunque, in L^1, in L^2, in L^∞. Esercizi: disuguaglianze fra norme in L^p per diversi p, inclusioni fra spazi L^p, limite della norma in L^p per $p \to +\infty$.

Approssimazione di funzioni misurabili con funzioni continue. *Un insieme di $\mathbb{R}^N$ misurabile con misura finita secondo Lebesgue è approssimabile dall'interno con compatti e dall'esterno con aperti.* La distanza di un punto da un insieme in uno spazio metrico, e la distanza fra un compatto e un chiuso disgiunti. Funzioni continue a supporto compatto. *Il lemma di Urysohn in $\mathbb{R}^N$. Il teorema di Lusin in $\mathbb{R}^N$.* L'insieme delle funzioni semplici misurabili e nulle al di fuori di un insieme di misura finita è denso in $L^p(\mu)$ se $1 \le p < +\infty$. *L'insieme delle funzioni continue a supporto compatto su $\mathbb{R}^N$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^N)$ se* $1 \le p < +\infty$. Applicazione: la disuguaglianza di Hardy: se $f \in L^p(]0, +\infty[)$ e $F(x) := (1/x)\int_0^t f$, allora $\|F\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

1. Una funzione a valori in $\mathbb{R}^2$ è misurabile se e solo se le componenti sono misurabili.
2. Il teorema della convergenza monotona.
3. Il lemma di Fatou.
4. Il teorema della convergenza dominata.
5. Il teorema di Vitali-Lebesgue sull'integrabilità secondo Riemann.
6. La disuguaglianza di Jensen.
7. Le disuguaglianze di Hölder e di Minkowski.
8. Teorema di completezza di L^p.
9. Un insieme di $\mathbb{R}^N$ con misura finita secondo Lebesgue è approssimabile dall'interno con compatti e dall'esterno con aperti.
10. Il lemma di Urysohn in $\mathbb{R}^N$.
11. Il teorema di Lusin in $\mathbb{R}^N$.
12. L'insieme delle funzioni continue a supporto compatto su $\mathbb{R}^N$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^N)$ se $1 \le p < +\infty$.