Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2006/2007

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 6
Programma Dettagliato

Prof. Gianluca Gorni

Testi di riferimento: Walter Rudin, Analisi Reale e Complessa, Boringhieri. Giuseppe De Marco, *Analisi Due* (prima edizione), Decibel-Zanichelli, capitolo II.18. Materiale didattico attinente al corso è anche disponibile presso

`http://www.dimi.uniud.it/gorni/Istituzioni`

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

Regolamento d'esame: L'esame consiste di uno scritto e di un orale. Gli scritti possono essere ripetuti senza limitazioni, ma ogni scritto consegnato annulla i precedenti. Chi ha superato lo scritto a un appello può dare l'orale in qualsiasi appello, o anche su appuntamento individuale.

Misura e integrazione astratta

σ-algebre e funzioni misurabili. Richiami sulla definizione di topologia, e definizione parallela di σ-algebra e di spazio misurabile. Prime proprietà delle σ-algebre. Funzioni continue e funzioni misurabili. Misurabilità della composizione di funzioni. Ogni aperto di $\mathbb{R}^2$ è unione di una famiglia numerabile di rettangoli. Una funzione a valori in $\mathbb{R}^2$ è misurabile se e solo se lo sono le due componenti. Funzioni misurabili a valori complessi on in $\mathbb{R}^n$. Funzioni caratteristiche di insiemi e loro misurabilità. Le possibili σ-algebre su un insieme di 0,1,2,3 punti e cenni al caso di un insieme finito qualsiasi. L'intersezione di una famiglia di σ-algebre su X è ancora una σ-algebra su X. La σ-algebra generata da una famiglia di sottinsiemi di X. Cenni alla "costruzione" della σ-algebra generata. La famiglia dei boreliani di uno spazio topologico. Le famiglie F_σ e G_δ di Hausdorff. Gli intervalli chiusi o semichiusi sono boreliani. L'insieme dei razionali è boreliano. Cenno all'esistenza di insiemi non boreliani in $\mathbb{R}$. La topologia e i boreliani dell'insieme dei reali estesi $[-\infty, +\infty]$. Funzioni boreliane e loro varie caratterizzazioni. Composizione di una funzione misurabile con una boreliana è misurabile. Richiami sul massimo e minimo limite di una successione di numeri reali estesi. L'estremo superiore e inferiore, e il massimo e il minimo limite di una successione di funzioni misurabili a valori reali estesi è ancora misurabile. Passaggio al limite puntuale per successioni di funzioni misurabili. Funzioni semplici misurabili. Discretizzazione dei numeri reali usando la parte intera. Le funzioni misurabili positive sono sempre il limite puntuale di una successione crescente di funzioni semplici misurabili positive. Le funzioni misurabili positive si possono esprimere come combinazioni lineari numerabili di funzioni caratteristiche.

Misura e integrazione astratta. Definizione di misura positiva. Esempi: misura di Lebesgue, misura del conteggio, misura concentrata in un punto, misura identicamente nulla. Prime proprietà delle misure: il vuoto ha misura nulla, additività finita, monotonia, passaggio al limite su successioni crescenti o decrescenti. Definizione di integrale di una funzione semplice misurabile positiva. Prime proprietà: l'integrale è una misura rispetto all'insieme su cui si integra, linearità, monotonia. Definizione di integrale di una funzione misurabile positiva. Prime proprietà. *Il teorema della convergenza monotona.* Il teorema dell'integrazione di serie di funzioni positive. *Lemma di Fatou.* Esempi e interpretazione geometrica del lemma di Fatou. La misura definita da $\varphi(E) := \int_E f\,d\mu$. Integrazione di funzioni reali a segno qualsiasi o complesse: funzioni semiintegrabili e funzioni di L^1. Linearità dell'integrale per funzioni di L^1. La disuguaglianza $|\int f| \le \int |f|$. *Il teorema della convergenza dominata.* Insiemi trascurabili e proprietà vere quasi ovunque. La relazione di equivalenza dell'uguaglianza quasi ovunque. Spazi di misura completi. Esistenza del completamento di uno spazio di misura non completo. Se $\sum_n \|f_n\|_1 < \infty$ allora $\sum_n f_n$ converge quasi ovunque e in L^1, e $\int \sum_n f_n = \sum_n \int f_n$. Condizioni necessarie e sufficienti perché $\int f = 0$. Se $\sum_n \mu(E_n) < +\infty$ allora quasi ogni x appartiene solo a un numero finito di E_n. Esercizi sull'integrazione astratta: "continuità" dell'integrale rispetto all'insieme, un problema di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Confronto con l'integrale di Riemann. Funzioni a gradino e integrazione secondo Riemann. Oscillazione di una funzione fra spazi metrici.*Il teorema di Vitali-Lebesgue:* una funzione limitata da $\mathbb{R}^N$ a $\mathbb{R}$ (e nulla fuori da un limitato) è integrabile secondo Riemann se e solo se l'insieme dei punti di discontinuità ha misura nulla. Cenno a funzioni integrabili secondo Lebesgue che non sono uguali quasi ovunque a nessuna funzione integrabile secondo Riemann, usando varianti dell'insieme di Cantor.

Spazi L^p e spazi di Hilbert

Disuguaglianze di convessità. Definizione di funzione convessa di una variabile e suo significato geometrico. Proprietà di base delle funzioni convesse di una variabile: condizione equivalente in termini di rapporto incrementale, esistenza di derivate destre e sinistre e loro monotonia, posizione del grafico rispetto alle rette tangenti (destre o sinistre), condizioni di convessità nel caso di funzioni derivabili una o due volte. *Disuguaglianza di Jensen.* Interpretazione geometrica in termini di baricentro di una distribuzione di massa sul grafico della funzione. Interpretazione della disuguaglianza di Jensen in termini probabilistici. Disuguaglianze di convessità: fra media geometrica e aritmetica, fra medie pesate geometrica e aritmetica, e disuguaglianza di Young.

Spazi L^p. *Le disuguaglianze di Hölder e di Minkowski.* Spazi L^p per $1 \le p < +\infty$ e norme corrispondenti. Le norme L^p nel caso della misura del conteggio su insiemi finiti o su $\mathbb{N}$, e gli spazi ℓ^p. Maggioranti essenziali ed estremo superiore essenziale di una funzione reale su uno spazio di misura. Lo spazio $L^\infty(\mu)$ e la sua norma. Riformulazione delle disuguaglianze di Hölder e Minkowski in termini di norme L^p. Successioni a variazione limitata. Uno spazio metrico è completo se e solo se ogni successione a variazione limitata converge. *Teorema di completezza di L^p.* Convergenza totale di una serie di funzioni. Significato e raffronto fra le convergenze in L^1 e in L^2. Raffronto fra convergenza in L^1, in L^2, in L^∞, convergenza uniforme, convergenza puntuale quasi ovunque. Esercizio: studio della dipendenza di $\|f\|_p$ da p, e limite per $p \to +\infty$.

Spazi di Hilbert e ortogonalità. Spazi vettoriali complessi con prodotto scalare: definizione e prime proprietà. Disuguaglianza di Schwarz. La disuguaglianza triangolare. La norma indotta da un prodotto scalare. Identità del parallelogrammo e ricostruzione del prodotto scalare Definizione di spazio di Hilbert. Esempi di spazi di Hilbert. Continuità del prodotto scalare e della norma. Vettori ortogonali e spazio ortogonale a un insieme. Insiemi convessi in uno spazio vettoriale. *Il teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.* Esempi di non unicità nel caso di spazi normati. *In uno spazio di Hilbert H, dati un sottospazio vettoriale chiuso M e $x \in H$, se y è il punto di M più vicino a x allora $x - y$ è ortogonale a M.* Decomposizione di uno spazio di Hilbert in somma diretta di un sottospazio chiuso più l'ortogonale, e relative proiezioni ortogonali. In uno spazio normato, aggiungendo un vettore a un sottospazio chiuso, il sottospazio generato è ancora chiuso. I sottospazi a dimensione finita sono chiusi.

Sistemi ortonormali, somme infinite di vettori, proiezioni ortogonali e basi hilbertiane. Sistemi ortonormali. *La formula della proiezione ortogonale sul sottospazio generato da un sistema ortonormale finito.* Somme infinite di vettori in spazi normati: definizione di sommabilità e di condizione di Cauchy. Se una somma è di Cauchy allora l'insieme di indici con vettore non nullo è al più numerabile. Se una somma è sommabile allora è di Cauchy. Se lo spazio è completo e la somma è di Cauchy allora è sommabile (dimostrazione a grandi linee). Somme infinite in dimensione 1 e in dimensione finita. Somme infinite in dimensione infinita: la convergenza assoluta è sufficiente per la sommabilità, ma non necessaria. Se i vettori x_λ sono a 2 a 2 ortogonali in uno spazio di Hilbert, allora $\sum_\lambda x_\lambda$ è sommabile se e solo se $\sum_\lambda \|x_\lambda\|^2 < +\infty$. Un lemma sulla distanza di un punto da un convesso in uno spazio con prodotto scalare. *La formula della proiezione ortogonale di un vettore sulla chiusura del sottospazio generato da un sistema ortonormale anche non finito.* Dato un sistema ortonormale $\{u_\lambda \ : \ \lambda \in \Lambda\}$, a ogni vettore $x \in H$ si associa la funzione $\hat{x}(\lambda) := \langle x \mid u_\lambda \rangle$ da Λ in $\mathbb{C}$. L'applicazione $x \mapsto \hat{x}$ risulta lineare, non espansiva, e suriettiva da H su $\ell^2(\Lambda)$. Suriettività: dato un sistema ortonormale $\{u_\lambda \ : \ \lambda \in \Lambda\}$ e un $a \in \ell^2(\Lambda)$ esiste un $x \in H$ tale che $\langle x, u_\lambda \rangle = a_\lambda$ per ogni λ. Sistemi ortonormali massimali, o basi hilbertiane. *Caratterizzazioni delle basi hilbertiane.* Identità di Bessel e di Parseval. Confronto fra basi hilbertiane e basi vettoriali (cenno). Esistenza di basi hilbertiane di uno spazio di Hilbert generico (cenno). Spazi separabili, e basi hilbertiane numerabili. Basi hilbertiane di spazi concreti.

Serie di Fourier trigonometriche. Il cerchio unitario $\mathbb{U}$ di $\mathbb{C}$ e la sua misura angolare normalizzata: definizione tramite la mappa $t \mapsto e^{it}$ e la misura di Lebesgue sulla retta. Prime proprietà: invarianza per coniugio e per rotazioni. Visualizzazione delle funzioni reali su $\mathbb{U}$. Integrazione di funzioni sul cerchio unitario e proprietà di simmetria. Lo spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{U})$. La base hilbertiana classica di $L^2(\mathbb{U})$ definita dalle potenze: $u_n(z) := z^n$. Il sistema $\{u_n \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$ è ortonormale (con verifica) e massimale (senza dimostrazione). La base hilbertiana trigonometrica. Coefficienti e serie di Fourier, somme parziali e convergenza in $L^2(\mathbb{U})$. *Calcolo dei coefficienti di Fourier dell'onda quadra. Uso dell'identità di Bessel per dedurre la formula notevole $\pi^2/8 = 1/1^2 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + \ldots$*

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

1. Il teorema della convergenza monotona.
2. Il lemma di Fatou.
3. Il teorema della convergenza dominata.
4. Il teorema di Vitali-Lebesgue sull'integrabilità secondo Riemann.
5. La disuguaglianza di Jensen.
6. Le disuguaglianze di Hölder e di Minkowski.
7. Teorema di completezza di L^p.
8. Il teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.
9. In uno spazio di Hilbert H, dati un sottospazio vettoriale chiuso M e $x \in H$, se y è il punto di M più vicino a x allora $x - y$ è ortogonale a M.
10. La formula della proiezione ortogonale sulla chiusura del sottospazio generato da una famiglia di vettori ortonormali in uno spazio di Hilbert: caso finito e caso infinito.
11. Le caratterizzazioni delle basi hilbertiane.
12. Calcolo dei coefficienti di Fourier dell'onda quadra e la formula notevole $\pi^2/8 = 1/1^2 + 1/3^2 + 1/5^2 + \dots$