Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2005/2006

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 6

Programma Dettagliato

Prof. Gianluca Gorni

Testi di riferimento: Walter Rudin, Analisi Reale e Complessa, Boringhieri. Giuseppe De Marco, *Analisi Due* (prima edizione), Decibel-Zanichelli, capitolo II.18. Materiale didattico attinente al corso è anche disponibile presso
`http://www.dimi.uniud.it/gorni/Istituzioni`

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

Regolamento d'esame: L'esame consiste di uno scritto e di un orale. Gli scritti possono essere ripetuti senza limitazioni, ma ogni scritto consegnato annulla i precedenti. Chi ha superato lo scritto a un appello può dare l'orale in qualsiasi appello, o anche su appuntamento individuale.

Misura e integrazione astratta

σ-algebre e funzioni misurabili. Assiomi dello spazio topologico e dello spazio misurabile, presentati in parallelo. Prime conseguenze. Funzioni misurabili. Composizione di una funzione misurabile con una continua. Ogni aperto di $\mathbb{R}^2$ è l'unione di una famiglia al più numerabile di rettangoli aperti. Una funzione $X \to \mathbb{R}^2$ è misurabile se e solo se lo sono le due componenti. Funzioni misurabili complesse. Somma e prodotto di funzioni misurabili reali o complesse è misurabile. Funzioni caratteristiche di insiemi. Esempi di σ-algebre su insiemi finiti. Data una famiglia di sottinsiemi di X esiste sempre la minima σ-algebra su X contenente la famiglia. La σ-algebra dei boreliani di uno spazio topologico. Esempi di boreliani di $\mathbb{R}$: insiemi F_σ e G_δ. La famiglia dei boreliani di $\mathbb{R}$ è generata dagli intervalli aperti, o dalle semirette aperte. Cenno all'esistenza di misurabili secondo Lebesgue che non sono boreliani. Funzioni boreliane: definizioni equivalenti. Composizione di una funzione misurabile con una boreliana è misurabile. Esercizi sulle funzioni misurabili. La topologia e i boreliani dell'insieme dei numeri reali estesi $[-\infty, +\infty]$. Data una successione di funzioni misurabili reali estese, anche gli inviluppi superiore e inferiore, e il massimo e minimo limite sono misurabili. L'insieme delle funzioni misurabili a valori reali estesi è stabile per convergenza puntuale. L'insieme dei punti di convergenza di una successione di funzioni misurabili reali o complesse. Parte positiva e negativa di una funzione misurabile reale. Funzioni semplici misurabili e loro rappresentazioni come combinazioni lineari di funzioni semplici. Discretizzazione binaria dei numeri reali. Approssimazione puntuale di una funzione misurabile positiva con una successione crescente di funzioni semplici misurabili positive.

Misura e integrazione astratta. Definizione di misura positiva. Prime conseguenze: passaggio a limite su successioni monotone di insiemi. Esempi: la misura di Lebesgue, la misura concentrata in un punto, la misura del conteggio. L'aritmetica in $[0, +\infty]$. Definizione di integrale di una funzione semplice. Prime proprietà. Definizione di integrale di una funzione misurabile positiva. Prime proprietà. *Teorema della convergenza monotona*. Integrazione per serie di funzioni misurabili positive. Interpretazione dell'integrale nel caso della misura concentrata in un punto, o della misura del conteggio. *Lemma di Fatou*. Esempi. La misura definita tramite l'integrale di una funzione misurabile positiva rispetto a una misura data. Definizione di integrale di funzioni a segno qualsiasi o complesse: funzioni semiintegrabili e funzioni di L^1. Linearità dell'integrale su L^1. La disuguaglianza $|\int f| \leq \int |f|$. *Il teorema della convergenza dominata*. Proprietà vere quasi ovunque. Spazi di misura completi, e completamento di spazi non completi. I boreliani di $\mathbb{R}$ non sono completi rispetto alla misura di Lebesgue (cenno). Se $\sum \|f_n\|_1 < +\infty$ allora $\sum f_n$ converge quasi ovunque e $\int \sum f_n = \sum \int f_n$. Condizioni necessarie e sufficienti affinché una funzione (positiva, o a segno qualsiasi, o complessa) sia nulla quasi ovunque, in termini di integrale. Esercizi sull'integrazione astratta: "continuità" dell'integrale rispetto all'insieme, un problema di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Spazi L^p e spazi di Hilbert

Disuguaglianze di convessità. Definizione di funzione convessa di una variabile e suo significato geometrico. Proprietà di base delle funzioni convesse di una variabile: condizione equivalente in termini di rapporto incrementale, esistenza di derivate destre e sinistre e loro monotonia, posizione del grafico rispetto alle rette tangenti (destre o sinistre), condizioni di convessità nel caso di funzioni derivabili una o due volte. *Disuguaglianza di Jensen*. Interpretazione geometrica in termini di baricentro di una distribuzione di massa sul grafico della funzione. Interpretazione della disuguaglianza di Jensen in termini probabilistici. Disuguaglianze di convessità: fra media geometrica e aritmetica, fra medie pesate geometrica e aritmetica, e disuguaglianza di Young.

Spazi L^p. *Le disuguaglianze di Hölder e di Minkowski*. Spazi L^p per $1 \leq p < +\infty$ e norme corrispondenti. Le norme L^p nel caso della misura del conteggio su insiemi finiti o su $\mathbb{N}$, e gli spazi ℓ^p. Maggioranti essenziali ed estremo superiore essenziale di una funzione reale su uno spazio di misura. Lo spazio $L^\infty(\mu)$ e la sua norma. Riformulazione delle disuguaglianze di Hölder e Minkowski in termini di norme L^p. Successioni a variazione limitata. Uno spazio metrico è completo se e solo se ogni successione a variazione limitata converge. *Teorema di completezza di L^p*. Convergenza totale di una serie di funzioni. Significato e raffronto fra le convergenze in L^1 e in L^2. Raffronto fra convergenza in L^1, in L^2, in L^∞, convergenza uniforme, convergenza puntuale quasi ovunque. L'insieme delle funzioni semplici misurabili e nulle al di fuori da un insieme di misura finita è denso in L^p se $1 \leq p < +\infty$. Distanza di un punto da un insieme in uno spazio metrico. Distanza fra un compatto da un chiuso disgiunti. Lemma di Urysohn in $\mathbb{R}^n$. *Teorema di Lusin in $\mathbb{R}^n$*. Densità dell'insieme delle funzioni continue a supporto compatto in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Esercizio: studio della dipendenza di $\|f\|_p$ da p. La disuguaglianza di Hardy.

Spazi di Hilbert e ortogonalità. Spazi vettoriali complessi con prodotto scalare: definizione e prime proprietà. Disuguaglianza di Schwarz. La disuguaglianza triangolare. La norma indotta da un prodotto scalare. Identità del parallelogrammo e ricostruzione del prodotto scalare Definizione di spazio di Hilbert. Esempi di spazi di Hilbert. Continuità del prodotto scalare e della norma. Vettori ortogonali e spazio ortogonale a un insieme. Insiemi convessi in uno spazio vettoriale. *Il teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.* Sottospazi vettoriali chiusi di uno spazio di Hilbert e relative proiezioni ortogonali. In uno spazio normato, aggiungendo un vettore a un sottospazio chiuso, il sottospazio generato è ancora chiuso. I sottospazi a dimensione finita sono chiusi.

Sistemi ortonormali, proiezioni ortogonali e basi hilbertiane. Sistemi ortonormali. *La formula della proiezione ortogonale sul sottospazio generato da un sistema ortonormale finito.* Somme infinite di vettori in spazi normati: definizione di sommabilità e di condizione di Cauchy. Se una somma è di Cauchy allora l'insieme di indici con vettore non nullo è al più numerabile. Se una somma è sommabile allora è di Cauchy. Se lo spazio è completo e la somma è di Cauchy allora è sommabile. Somme infinite in dimensione 1 e in dimensione finita. Somme infinite in dimensione infinita: la convergenza assoluta è sufficiente per la sommabilità, ma non necessaria. Somme infinite di vettori a 2 a 2 ortogonali in uno spazio di Hilbert. Dato un sistema ortonormale $\{u_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, a ogni vettore $x \in H$ si associa la funzione $\hat{x}(\lambda) := \langle x, u_\lambda \rangle$ da Λ in $\mathbb{C}$. L'applicazione $x \mapsto \hat{x}$ risulta lineare, continua e suriettiva da H su $\ell^2(\Lambda)$. Un lemma sulla distanza di un punto da un convesso in uno spazio con prodotto scalare. *La formula della proiezione ortogonale di un vettore sulla chiusura del sottospazio generato da un sistema ortonormale.* Dato un sistema ortonormale $\{u_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ e un $a \in \ell^2(\Lambda)$ esiste un $x \in H$ tale che $\langle x, u_\lambda \rangle = a_\lambda$ per ogni λ. Sistemi ortonormali massimali, o basi hilbertiane. Caratterizzazioni delle basi hilbertiane. Identità di Bessel e di Parseval. Confronto fra basi hilbertiane e basi vettoriali (cenno). Esistenza di basi hilbertiane di uno spazio di Hilbert generico (cenno). Spazi separabili, e basi hilbertiane numerabili. Basi hilbertiane di spazi concreti.

Serie di Fourier trigonometriche. Il cerchio unitario $\mathbb{U}$ di $\mathbb{C}$ e le sue strutture: algebrica, topologica, di spazio di misura. Lo spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{U})$. L'insieme $\{z^n : n \in \mathbb{Z}\}$ è un sistema ortonormale in $L^2(\mathbb{U})$. Polinomi trigonometrici. La convoluzione di due funzioni su $\mathbb{U}$. *Approssimazione uniforme di una funzione continua sul cerchio unitario con una successione di polinomi trigonometrici.* La base hilbertiana $\{z^n : n \in \mathbb{Z}\}$ di $L^2(\mathbb{U})$. Esempio: *calcolo dei coefficienti di Fourier dell'onda quadra.* Applicazione: *la formula notevole* $\pi^2/8 = 1/1^2 + 1/3^2 + 1/5^2 + \dots$

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

1. Il teorema della convergenza monotona.
2. Il lemma di Fatou.
3. Il teorema della convergenza dominata.
4. La disuguaglianza di Jensen.
5. Le disuguaglianze di Hölder e di Minkowski.
6. Teorema di completezza di L^p.
7. Il teorema di Lusin sull'approssimazione delle funzioni misurabili su $\mathbb{R}^n$ con funzioni continue.
8. Il teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.
9. La formula della proiezione ortogonale su un sottospazio generato da una famiglia di vettori ortonormali in uno spazio di Hilbert: caso finito e caso infinito.
10. Le caratterizzazioni dei sistemi ortonormali massimali.
11. Approssimazione uniforme di una funzione continua sul cerchio unitario con una successione di polinomi trigonometrici.
12. Calcolo dei coefficienti di Fourier dell'onda quadra e la formula notevole $\pi^2/8 = 1/1^2 + 1/3^2 + 1/5^2 + \dots$