Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 6

Programma Dettagliato

Prof. Gianluca Gorni

Testi di riferimento: Walter Rudin, Analisi Reale e Complessa, Boringhieri. Giuseppe De Marco, *Analisi Due* (prima edizione), Decibel-Zanichelli, capitolo II.18. Materiale didattico attinente al corso è anche disponibile presso

`http://www.dimi.uniud.it/gorni/Istituzioni`

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

Regolamento d'esame: L'esame consiste di uno scritto e di un orale. Gli scritti possono essere ripetuti senza limitazioni, ma ogni scritto consegnato annulla i precedenti. Chi ha superato lo scritto a un appello può dare l'orale in qualsiasi appello, o anche su appuntamento individuale.

Misura e integrazione astratta

σ-algebre e funzioni misurabili. Definizioni parallele di topologia e di σ-algebra, spazio topologico e spazio misurabile, funzione continua e funzione misurabile. Prime conseguenze degli assiomi. Esempi di σ-algebre: i misurabili secondo Lebesgue in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{R}^n$, l'insieme delle parti di un insieme. Ogni aperto in $\mathbb{R}^2$ è unione di una famiglia numerabile di rettangoli aperti. Se $\Phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è continua e se $u, v: X \to \mathbb{R}$ sono misurabili, allora anche $x \mapsto \Phi(u(x), v(x))$ è misurabile. Misurabilità di somma, prodotto, valore assoluto, parte reale e immaginaria di funzioni misurabili a valori reali o complessi. Funzioni caratteristiche di insiemi e loro misurabilità. L'intersezione di una famiglia di σ-algebre è ancora una σ-algebra. La σ-algebra generata da una famiglia di sottinsiemi di un insieme. La σ-algebra dei boreliani di uno spazio topologico. Esempi di boreliani di $\mathbb{R}$. I boreliani di uno spazio topologico sono generati anche dai chiusi. I boreliani di $\mathbb{R}$ sono generati dagli intervalli, o dalle semirette. I boreliani dell'insieme dei reali estesi con $\mp\infty$. Funzioni boreliane fra spazi topologici. Caratterizzazione delle funzioni misurabili, o boreliane, in termini di boreliani, o di famiglie generatrici dei boreliani. Composizione di una funzione misurabile con una boreliana è misurabile. La funzione parte intera è boreliana. Richiami sul massimo e minimo limite di successioni di numeri reali estesi. L'estremo superiore di una successione di funzioni misurabili reali estese è misurabile. Funzioni semplici e loro rappresentazione come combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche. La discretizzazione dei numeri reali $2^{-n}\lfloor 2^n x \rfloor$. Ogni funzione misurabile positiva è limite crescente di una successione di funzioni semplici misurabili positive.

Misura e integrazione astratta. Assiomi delle misure e prime proprietà: misura del vuoto, additività finita, monotonia, passaggio al limite su successioni monotone di insiemi. Aritmetica nei reali estesi positivi. Integrazione di funzioni semplici positive e di funzioni misurabili positive. Lemmi preliminari sull'integrale di funzioni semplici positive, e prime proprietà dell'integrale di funzioni misurabili positive. *Il teorema della convergenza monotona.* Integrazione per serie di funzioni positive. *Il lemma di Fatou.* La disuguaglianza del lemma di Fatou può essere stretta. Esempio di applicazione del lemma di Fatou. La misura definita da $\varphi(E) := \int_E f\,d\mu$ e l'integrazione rispetto ad essa. Integrazione di funzioni a segno qualsiasi: funzioni semiintegrabili e funzioni sommabili. L'insieme delle funzioni sommabili è uno spazio vettoriale e l'integrale è un funzionale lineare. Sommabilità e integrale di funzioni a valori complessi. Linearità dell'integrale di funzioni di L^1. La disuguaglianza $|\int f| \leq \int |f|$. *Il teorema della convergenza dominata.* Interpretazione geometrica. Insiemi trascurabili e proprietà vere quasi ovunque. Uguaglianza quasi ovunque fra funzioni. Funzioni definite quasi ovunque, loro misurabilità e integrale. Completezza e non completezza di uno spazio di misura. Il completamento di uno spazio di misura non completo. Caratterizzazioni delle funzioni con integrale nullo.

Spazi L^p e spazi di Hilbert

Disuguaglianze di convessità. Funzioni convesse su un intervallo: definizione, significato geometrico, caratterizzazione in termini di crescenza del rapporto incrementale. Derivabilità sinistra e destra delle funzioni convesse nei punti interni, e posizione rispetto alle rette tangenti. Relazione fra convessità e crescenza della derivata prima. Relazione fra convessità e derivata seconda. *La disuguaglianza di Jensen.* Significato geometrico della disuguaglianza di Jensen. Disuguaglianze di convessità dedotte dalla disuguaglianza di Jensen: fra medie geometriche e medie aritmetiche, non pesate o pesate, disuguaglianza di Young. Esponenti coniugati. Esponenti coniugati, propri e impropri.

Spazi L^p. *Le disuguaglianze di Hölder e di Minkowski.* Gli spazi normati $L^p(\mu)$ per $1 \leq p < +\infty$. Maggioranti essenziali ed estremo superiore essenziale di una funzione misurabile reale. Lo spazio normato $L^\infty(\mu)$. Definizione di successione a variazione limitata. Uno spazio metrico è completo se e solo se tutte le successioni a variazione limitata convergono. *Se $\sum_n \|f_n\|_p < +\infty$ allora la serie $\sum_n f_n$ converge quasi ovunque e in L^p, e se $p = 1$ allora $\int \sum_n f_n = \sum_n \int f_n$.* Completezza degli spazi L^p. Significato della convergenza in L^p, e confronto con la convergenza quasi ovunque e la convergenza uniforme. Gli spazi di successioni ℓ^p. L'insieme delle funzioni semplici nulle al di fuori di un insieme di misura finita è denso in L^p se $p < +\infty$. La funzione distanza di un punto da un insieme in uno spazio metrico. *Il teorema di Lusin sull'approssimazione delle funzioni misurabili su $\mathbb{R}^n$ con funzioni continue.* L'insieme delle funzioni continue a supporto compatto su $\mathbb{R}^n$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^n)$ se $p < +\infty$. Esercizi sugli spazi L^p: se $p_1 < p_2 < p_3$ allora $L^{p_1} \cap L^{p_3} \subset L^{p_2}$; la funzione $p \mapsto \log \|f\|_p^p$ è convessa. Il limite della norma $\|f\|_p$ per $p \to +\infty$

Spazi di Hilbert e ortogonalità. Definizione di prodotto scalare in uno spazio vettoriale complesso. Prime proprietà. Disuguaglianza di Schwarz. Norma indotta dal prodotto scalare. Spazi di Hilbert. Esempi. Identità del parallelogrammo. *Il teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.* Ortogonalità. Teorema della proiezione ortogonale su un sottospazio vettoriale chiuso. Teorema di rappresentazione dei funzionali lineari continui in uno spazio di Hilbert.

Sistemi ortonormali, proiezioni ortogonali e basi hilbertiane. In uno spazio normato, aggiungendo un vettore a un sottospazio chiuso, il sottospazio generato è ancora chiuso. I sottospazi a dimensione finita sono chiusi. *La formula della proiezione ortogonale su un sottospazio generato da un numero finito di vettori ortonormali in uno spazio di Hilbert.* Il problema delle somme infinite di vettori: la convergenza assoluta di una serie non è necessaria affinché la somma sia indipendente dall'ordine. Definizione di sommabilità di una somma infinita, e relativa condizione di Cauchy. Prime proprietà. Sommabilità di una somma infinita di vettori a due a due ortogonali in termini della somma dei quadrati delle norme. *La formula della proiezione ortogonale di un vettore sulla chiusura del sottospazio generato da un sistema ortonormale: caso infinito. La caratterizzazioni dei sistemi ortonormali che generano un sottospazio denso in termini di identità di Bessel e di Parseval.* Coefficienti di Fourier di un vettore di uno spazio di Hilbert rispetto a un sistema ortonormale. Disuguaglianza di Bessel. Teorema di Riesz-Fischer: l'applicazione che a un vettore associa la famiglia dei coefficienti di Fourier è suriettiva da H a ℓ^2. Ulteriore condizione equivalente alla densità del sottospazio generato da una famiglia ortonormale. Definizione di base hilbertiana di uno spazio di Hilbert. Confronto col concetto di base vettoriale. Spazi topologici separabili. Gli spazi di Hilbert separabili hanno sempre una base hilbertiana numerabile. Lo spazio $L^2(\mathbb{R}^n)$ è separabile, con lineamenti di dimostrazione. Basi esplicite di $L^2(\mathbb{R})$: la base di Haar (cenni). Cenni al problema di basi hilbertiane di $L^2(\mathbb{R}^2)$ e di $L^2(\mathbb{R}^3)$. Esistenza di basi hilbertiane di uno spazio di Hilbert generico usando il principio di massimalità di Hausdorff (equivalente all'assioma di scelta).

Serie di Fourier trigonometriche. Il cerchio unitario $\mathbb{U}$ in $\mathbb{C}$, l'esponenziale complesso $\varphi(t) := e^{it}$, la corrispondenza fra funzioni periodiche sui reali e funzioni su $\mathbb{U}$. Come dotare $\mathbb{U}$ di una struttura di spazio di misura in modo che la misura sia invariante per rotazioni e per coniugio, e che la misura di tutto $\mathbb{U}$ sia 1 (misura normalizzata): $\mu_{\mathbb{U}}(E) := \lambda_{\mathbb{R}}(\varphi^{-1}(E) \cap [0, 2\pi[)/(2\pi)$, dove $\lambda_{\mathbb{R}}$ è la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$. L'integrazione di una funzione su $\mathbb{U}$ e la formula $\int_{\mathbb{U}} F(z)dz = \int_0^{2\pi} F(e^{it})\frac{dt}{2\pi}$. Gli spazi $L^p(\mathbb{U})$. La formula di invarianza per rotazioni: $\int_{\mathbb{U}} F(\alpha z)dz = \int_{\mathbb{U}} F(z)dz$ se $\alpha \in \mathbb{U}$. L'invarianza per coniugio o reciproco: $\int_{\mathbb{U}} F(\overline{z})dz = \int_{\mathbb{U}} F(1/z)dz = \int_{\mathbb{U}} F(z)dz$. La convoluzione fra due funzioni di $L^2(\mathbb{U})$: $(F * G)(z) := \int_{\mathbb{U}} F(w)G(z/w)dw$. Il coniugio è commutativo. Lo spazio $L^2(\mathbb{U})$ e il relativo prodotto scalare. La famiglia delle potenze $u_n(z) := z^n$ per $n \in \mathbb{Z}$ è ortonormale in $L^2(\mathbb{U})$. Polinomi trigonometrici. *Il lemma sull'approssimazione uniforme di una funzione continua su $\mathbb{U}$ con una successione di polinomi trigonometrici ottenuti per convoluzione con polinomi trigonometrici aventi opportune proprietà. Esistenza di polinomi trigonometrici con le proprietà richieste.* L'insieme delle funzioni continue su $\mathbb{U}$ è denso in $L^2(\mathbb{U})$. La famiglia delle funzioni $u_n(z) := z^n$ per $n \in \mathbb{Z}$ è una base hilbertiana di $L^2(\mathbb{U})$. Serie di Fourier di una funzione di $L^2(\mathbb{U})$ rispetto alla base hilbertiana, coefficienti di Fourier, identità di Bessel, somme parziali, distinzione fra convergenza in $L^2(\mathbb{U})$ e convergenza puntuale. Esempio: calcolo dei coefficienti di Fourier dell'onda quadra. La serie notevole $1/1^2 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + \cdots = \pi^2/8$. Le somme parziali scritte in termini di combinazioni lineari di seni. La serie notevole $1/1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \cdots = \pi/4$. *Le somme parziali della serie di Fourier espresse in termini di convoluzione col nucleo di Dirichlet. Teorema di convergenza puntuale delle somme parziali della serie di Fourier in ipotesi di Lipschitz globali.* Raffinamenti del risultato in ipotesi più deboli. Esempio: calcolo dei coefficienti di Fourier dell'onda a dente di sega. La serie notevole $1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots = \pi^2/6$.

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

1. Il teorema della convergenza monotona.
2. Il lemma di Fatou.
3. Il teorema della convergenza dominata.
4. La disuguaglianza di Jensen.
5. Le disuguaglianze di Hölder e di Minkowski.
6. Se $\sum_n \|f_n\|_p < +\infty$ allora la serie $\sum_n f_n$ converge quasi ovunque e in L^p, e se $p = 1$ allora $\int \sum_n f_n = \sum_n \int f_n$.
7. Il teorema di Lusin sull'approssimazione delle funzioni misurabili su $\mathbb{R}^n$ con funzioni continue.
8. Il teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.
9. La formula della proiezione ortogonale su un sottospazio generato da una famiglia di vettori ortonormali in uno spazio di Hilbert: caso finito e caso infinito.
10. La caratterizzazioni dei sistemi ortonormali che generano un sottospazio denso in termini di identità di Bessel e di Parseval
11. Il lemma sull'approssimazione uniforme di una funzione continua su $\mathbb{U}$ con una successione di polinomi trigonometrici ottenuti per convoluzione con polinomi trigonometrici aventi opportune proprietà. Esistenza di polinomi trigonometrici con le proprietà richieste
12. Le somme parziali della serie di Fourier espresse in termini di convoluzione col nucleo di Dirichlet. Il teorema di convergenza puntuale delle somme parziali della serie di Fourier in ipotesi di Lipschitz globali.