Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 6
Programma Dettagliato

Prof. GIANLUCA GORNI

Testi di riferimento: WALTER RUDIN, Analisi Reale e Complessa, Boringhieri. GIUSEPPE DE MARCO, *Analisi Due* (prima edizione), Decibel-Zanichelli, capitolo II.18. Materiale didattico attinente al corso è anche disponibile presso

`http://www.dimi.uniud.it/~gorni/Istituzioni`

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

Regolamento d'esame: L'esame consiste di uno scritto e di un orale. Gli scritti possono essere ripetuti senza limitazioni, ma ogni scritto consegnato annulla i precedenti. Chi ha superato lo scritto a un appello può dare l'orale in qualsiasi appello, o anche su appuntamento individuale.

Misura e integrazione astratta

σ-algebre e funzioni misurabili. Definizioni parallele di spazio topologico e di spazio misurabile. prime proprietà delle σ-algebre.Funzioni misurabili a valori in uno spazio topologico. Prime proprietà. Misurabilità di somma e prodotto di funzioni misurabili reali o complesse. La σ-algebra generata da una famiglia di sottinsiemi di un insieme. La σ-algebra dei boreliani di uno spazio topologico. Esempi di boreliani di $\mathbb{R}$. Condizioni equivalenti di misurabilità per le funzioni reali. Misurabilità degli estremi superiori e inferiori, e di massimo e minimo limite di successioni di funzioni reali misurabili. Parte positiva e parte negativa di un numero reale o di una funzione reale. Discretizzazione binaria dei numeri reali. Funzioni semplici misurabili. Una funzione positiva è misurabile se e solo se è il limite puntuale di una successione crescente di funzioni semplici misurabili positive.

Misure e integrale. Definizione di misura positiva su uno spazio misurabile. Prime proprietà: misura dell'insieme vuoto, additività finita, monotonia, passaggio al limite su successioni crescenti o decrescenti di insiemi. L'aritmetica su $[0, +\infty]$. Definizione di integrale per funzioni semplici misurabili positive, e per funzioni misurabili positive. Prime proprietà. Lemmi sull'integrale delle funzioni semplici misurabili positive. Prime proprietà dell'integrale di funzioni misurabili positive. *Il teorema della convergenza monotona.* Integrale della somma di due o di una serie di funzioni misurabili positive. Interpretazione dell'integrale rispetto alla misura del conteggio. *Lemma di Fatou.* Data una funzione misurabile positiva f, la funzione $E \mapsto \int_E f\,d\mu$ è una misura positiva. Integrale rispetto alla misura concentrata in un punto. Integrale di funzioni non positive:

funzioni reali semi-integrabili e funzioni di L^1. L'insieme L^1 è uno spazio vettoriale e l'integrale è un funzionale lineare. La (semi)norma $\|f\|_1$. La disuguaglianza $|\int f| \le \int |f|$. *Il teorema della convergenza dominata.* Insiemi trascurabili. Il completamento di uno spazio di misura coi sottinsiemi degli insiemi trascurabili. Funzioni misurabili definite quasi ovunque. *Integrabilità per serie nel caso in cui la somma delle norme in L^1 è finita.* Condizioni sugli integrali che implicano che una funzione è nulla quasi ovunque. Esercizi sulla misura e l'integrazione astratta.

Spazi L^p e spazi di Hilbert

Spazi L^p. Funzioni convesse su un intervallo della retta: definizione in termini di posizione del grafico rispetto alle rette secanti, e caratterizzazioni in termini di crescenza del rapporto incrementale. Continuità e derivabilità destra e sinistra delle funzioni convesse all'interno del dominio. Posizione del grafico rispetto alle rette tangenti. *La disuguaglianza di Jensen.* Disuguaglianze di convessità: le disuguaglianze fra medie pesate geometriche e aritmetiche. La disuguaglianza di Young. Esponenti coniugati. *Le disuguaglianze di Hölder e di Minkowski.* Lo spazio normato L^p per $1 \le p < +\infty$. Maggioranti essenziali ed estremi superiori essenziali di funzioni misurabili su uno spazio di misura. Lo spazio normato L^∞. Esponenti coniugati degeneri. Riscrittura della disuguaglianza di Hölder in termini di norme in L^p. *Lo spazio normato L^p è completo.* Confronto fra convergenza in L^p e convergenza puntuale quasi ovunque. Densità dell'insieme delle funzioni semplici misurabili in L^p. Funzioni continue a supporto compatto e loro densità in L^p (senza dimostrazione). Esercizi sugli spazi L^p: dipendenza della norma in L^p da p; l'insieme dei p per i quali la norma è finita è un intervallo, su cui la norma è continua; il logaritmo dell'integrale di $|f|^p$ è una funzione convessa di p. Un esempio di funzione che sta in L^p se e solo se $p = 2$; il limite della norma in L^p quando $p \to +\infty$; in uno spazio di probabilità la norma in L^p cresce con p.

Spazi di Hilbert, basi hilbertiane e serie di Fourier. Spazi vettoriali con prodotto scalare. La disuguaglianza di Schwarz e la disuguaglianza triangolare. La norma indotta da un prodotto scalare. Spazi di Hilbert. Esempi di spazi di Hilbert. Continuità di prodotto scalare e norma. Insiemi convessi. Identità del parallelogrammo. *Teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.* Ortogonalità e sottospazio ortogonale a un insieme. Dato uno spazio di Hilbert e un sottospazio vettoriale chiuso, lo spazio si scompone in somma diretta del sottospazio e dell'ortogonale. Proiezioni ortogonali su sottospazi chiusi. *In uno spazio normato, il sottospazio generato da un sottospazio chiuso e da un vettore è ancora chiuso.* I sottospazi a dimensione finita sono chiusi. Formula della proiezione ortogonale su un sottospazio a dimensione finita, data una base ortogonale.

Basi hilbertiane. Definizione di somma infinita di vettori in uno spazio normato. Somme infinite con la proprietà di Cauchy. Se una somma infinita ha la proprietà di Cauchy allora al più una quantità numerabile di vettori e non nulla. In uno spazio normato completo la sommabilità equivale alla proprietà di Cauchy. Caratterizzazione della sommabilità di numeri positivi e di vettori in dimensione finita. In dimensione infinita la sommabilità di vettori non equivale alla sommabilità delle norme. *Sommabilità di* *sistemi ortogonali in spazi di Hilbert:* se gli u_α sono a 2 a 2 ortogonali, allora $\sum_\alpha u_\alpha$ è sommabile se e solo se $\sum_\alpha \|u_\alpha\|^2 < +\infty$, e in tal caso $\|\sum_\alpha u_\alpha\|^2 = \sum_\alpha \|u_\alpha\|^2$. Formula della proiezione ortogonale sulla chiusura del sottospazio generato da un sistema ortonormale. *Basi hilbertiane e loro caratterizzazione* (somme infinite di Fourier, identità di Bessel, identità di Parseval). Esistenza di basi hilbertiane per spazi di Hilbert generici. Cenni a una base hilbertiana di $L^2(\mathbb{R})$.

Serie di Fourier. Il cerchio unitario $\mathbb{U}$ di $\mathbb{C}$ dotato di una misura invariante per isometrie. Convoluzione di funzioni sul cerchio unitario. Polinomi trigonometrici. *Approssimazione uniforme di funzioni continue con polinomi trigonometrici usando la convoluzione.* I polinomi trigonometrici sono densi in $L^2(\mathbb{U})$. Serie di Fourier trigonometriche. La serie di Fourier dell'onda quadra.

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

1. Il teorema della convergenza monotona.
2. Lemma di Fatou.
3. Il teorema della convergenza dominata.
4. Integrabilità per serie nel caso in cui la somma delle norme in L^1 è finita.
5. La disuguaglianza di Jensen.
6. Le disuguaglianze di Hölder e di Minkowski.
7. Lo spazio normato L^p è completo.
8. Teorema della minima distanza di un punto da un convesso chiuso in uno spazio di Hilbert.
9. In uno spazio normato, il sottospazio generato da un sottospazio chiuso e da un vettore è ancora chiuso.
10. Sommabilità di sistemi ortogonali in spazi di Hilbert.
11. Basi hilbertiane e loro caratterizzazione.
12. Approssimazione uniforme di funzioni continue sul cerchio unitario con polinomi trigonometrici usando la convoluzione.