Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 6

Prova Scritta del 15 febbraio 2010

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Siano $p, q, r \in [1, +\infty]$ tre costanti tali che $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} = 1$. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura.

a. Mostrare che $abc \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} + \dfrac{c^r}{r}$ per ogni $a, b, c \geq 0$.
(Come nella disuguaglianza di Young. . .)

b. Date $f, g, h\colon X \to [0, +\infty]$ misurabili, mostrare che

$$\int_X fgh\,d\mu \leq \Big(\int_X f^p d\mu\Big)^{1/p} \Big(\int_X g^q d\mu\Big)^{1/q} \Big(\int_X h^r\,d\mu\Big)^{1/r}.$$

2. Per $x \in [0, 1]$ poniamo $f(x) = 0$ quando x è razionale, mentre se x è irrazionale sia $f(x) = n$, dove la prima cifra decimale non nulla di x dopo la virgola è l'n-esima. Dimostrare che f è misurabile e calcolarne l'integrale su $[0, 1]$.

3. Sia $[a, b]$ un intervallo compatto, $f_n\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni di classe C^1 tali che $n \mapsto f_n(a)$ converga, e che la successione delle derivate f_n' converga puntualmente a una funzione $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Supponiamo inoltre che esista $h \in L^1(a, b)$ tale che $|f_n'(x)| \leq h(x)$ per ogni n e per ogni $x \in [a, b]$.

a. Mostrare che $g \in L^1(a, b)$, e che f_n converge puntualmente a una funzione $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt$. Inoltre se $x \in [a, b]$ è un punto in cui g è continua, allora f è derivabile in x e $f'(x) = g(x)$.
(Teorema fondamentale del calcolo applicato alle f_n e convergenza dominata. . .)

b. Mostrare che le f_n convergono uniformemente su $[a, b]$.

4. Dimostrare che $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{e^x - \alpha} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^{n-1}}{1 + n^2}$ se $|\alpha| < 1$. E quando $\alpha = \pm 1$?
(Usare la formula per la somma geometrica $r/(1-r) = \sum_{n=1}^{+\infty} r^n$ e l'integrazione per serie).

Punti: 8+10, 12, 10+5, 15.