Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2008/2009

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 6

Prova Scritta del 14 luglio 2009

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura, sia $f \in L^1(\mu)$, e sia $\varepsilon > 0$. Allora esiste un insieme $A_\varepsilon \in \mathcal{M}$ di misura finita e tale che $\displaystyle\int_{X \setminus A_\varepsilon} |f| d\mu < \varepsilon$.

2. Consideriamo la successione di funzioni $f_n(x) := \left(\dfrac{n+x}{n+2x}\right)^n$ per $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Dimostrare che la successione è monotona al variare di n, e calcolarne il limite puntuale. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) e^{x/2} dx$ e $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) e^{-x/2} dx$.
(Si può usare la disuguaglianza $\log(1+x) \leq x$).

3. Sia $f\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ una funzione misurabile secondo Lebesge, e per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo l'insieme $A_n := \{x \in \mathbb{R} \mid n \leq f(x) < n+1\}$.

a. Supponiamo che A_n abbia misura finita > 0 secondo Lebesgue per ogni n. Dimostrare che allora esiste $g \in L^1(\mathbb{R})$ tale che $f \cdot g \notin L^1(\mathbb{R})$.
(Prendere $g = \sum a_n \chi_{A_n}$ per un'opportuna successione $a_n \ldots$).

b. Supponiamo che A_n abbia misura > 0 (non necessariamente finita) secondo Lebesgue per infiniti valori di n. Dimostrare che allora esiste $g \in L^1(\mathbb{R})$ tale che $f \cdot g \notin L^1(\mathbb{R})$.

Punti: 12, 15, 12+10.