Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2008/2009

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 6

Prova Scritta del 1 luglio 2009

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Sia $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni integrabili secondo Riemann, nulle fuori dall'intervallo compatto $[a, b]$ ed equilimitate. Supponiamo che f_n converga puntualmente a una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dimostrare che allora gli integrali secondo Riemann delle f_n tendono a un limite finito, e questo limite è compreso fra l'integrale inferiore e l'integrale superiore secondo Riemann di f.
(Grazie al teorema di Vitali-Lebesgue si può sfruttare la teoria di Lebesgue).

2. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura positiva, $f \in L^1(\mu)$, $f \geq 0$, con $\int_X f\, d\mu > 0$. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X n \arctan\Big(\frac{f}{n^\alpha}\Big) d\mu$$

in funzione del parametro $\alpha > 0$.
(Se $\alpha \geq 1$ mostrare che l'integrando è dominato da f).

3. Sia $f\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione, e poniamo $F(x) := \int_0^1 f(x, y)dy$ per gli $x \in [0,1]$ per i quali l'integrale ha senso.

a. Supponiamo che f sia continua su $[0,1] \times [0,1]$. Dimostrare che allora F è definita e continua su $[0,1]$.
(Data x_n una successione tale che $x_n \to \bar{x}$, porre $g_n(y) := f(x_n, y)$, e vedere se si può passare al limite $F(x_n) = \int_0^1 g_n$ sotto il segno di integrale).

b. Supponiamo che f sia limitata su $[0,1] \times [0,1]$, e che sia continua in tutti i punti fuori della diagonale $\{(x, y) \,:\, x = y\}$. Dimostrare che anche allora F è definita e continua su $[0,1]$.
(Come per il punto precedente, però la convergenza puntuale di g_n non è ovunque...).

4. Siano $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, \pi/2[$. Mostrare che $\tan((x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n) \leq (\tan x_1 + \tan x_2 + \cdots + \tan x_n)/n$.

Punti: 15, 10, 10+10, 6.