Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2007/2008

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 6

Prova Scritta del 25 febbraio 2009

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Data la successione di funzioni $f_n(x) := \left(\dfrac{n+x}{n+2x}\right)^n$ per $x \in [0,+\infty[$, dimostrare che $f_n \geq f_{n+1}$, e calcolare i limiti di $\int_0^{+\infty} f_n(x)e^{x/2}dx$ e di $\int_0^{+\infty} f_n(x)e^{-x/2}dx$ per $n \to +\infty$.

2. a. Dimostrare che l'insieme delle funzioni a gradino $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è denso in $L^p(\mathbb{R})$ se $1 \leq p < +\infty$. (Una funzione $f \in L^p(\mathbb{R})$ può essere prima approssimata in $L^p(\mathbb{R})$ con una funzione g continua a supporto compatto, grazie a Lusin, e poi g è uniformemente continua, per cui si può a sua volta approssimare con...)

b. Considerare l'insieme delle funzioni a gradino $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con valori razionali ed estremi razionali degli intervalli di suddivisione. Dimostrare che questo insieme è denso in $L^p(\mathbb{R})$ se $1 \leq p < +\infty$.
(Una funzione a gradino si può approssimare in $L^p(\mathbb{R})$ con funzioni a gradino "razionali"...)

c. Dimostrare che $L^p(\mathbb{R})$ ammette un sottinsieme numerabile denso se $1 \leq p < +\infty$.

3. Su $X := [0,+\infty[$ si consideri la misura $\mu(E) := \int_E e^{-x}dx$ quando $E \subset X$ è misurabile secondo Lebesgue. Definiamo le funzioni $f_1(x) \equiv 1$, $f_2(x) := x-1$, $f_3(x) := x^2-4x+2$. Mostrare che le tre funzioni appartengono a $L^2(\mu)$ e che formano una terna ortogonale. Scrivere la formula per la proiezione ortogonale di una generica $f \in L^2(\mu)$ sul sottospazio generato da f_1, f_2, f_3.
(La funzione e^{-x} è la "densità" di μ rispetto alla misura di Lebesgue; c'è una formula che esprime l'integrale rispetto a μ in termini di un integrale rispetto alla misura di Lebesgue).

Punti: 15, 10+10+10, 15.