Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2007/08

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 6

Prova Scritta del 26 marzo 2008

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1.a. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e nulla al di fuori di un intervallo limitato. Dimostrare che f è integrabile secondo Riemann se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due funzioni $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue tali che $g \le f \le h$ e $\int_{\mathbb{R}} (h - g) d\lambda < \varepsilon$.
(Una funzione a gradino si può approssimare dall'alto o dal basso con una funzione continua...)

b. Data una $g\colon \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$, si dice che g è *semicontinua inferiormente* se $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \mid g(x) > \alpha\}$ è aperto, ed è *semicontinua superiormente* se $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \mid g(x) < \alpha\}$ è aperto. Dimostrare le seguenti affermazioni: g è semicontinua inferiormente se e solo se $-g$ lo è superiormente. Se g_i è semicontinua inferiormente per ogni $i \in I$, allora $\sup_{i \in I} g_i$ è ancora semicontinua inferiormente; se g_i è semicontinua superiormente per ogni $i \in I$, allora $\inf_{i \in I} g_i$ è ancora semicontinua superiormente. Infine, una funzione $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua se e solo se è semicontinua sia superiormente che inferiormente.

c. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e nulla al di fuori di un intervallo limitato. Dimostrare che f è integrabile secondo Riemann se e solo se esistono $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ semicontinue rispettivamente inferiormente e superiormente tali che $g \le f \le h$ dappertutto, e $g = h$ quasi ovunque (rispetto alla misura di Lebesgue).
(Per una delle implicazioni, osservare che nei punti x in cui $g(x) = h(x)$ la f risulta continua...)

2. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura, e sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ misurabile tale che $\int_X e^{p_0 f} d\mu < +\infty$ per almeno un $p_0 > 0$. Dimostrare che allora

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{1}{p} \log \int_X e^{pf} d\mu = \sup \operatorname{ess} f \,.$$

(Cosa succede a $\|g\|_p$ per $p \to +\infty$?)

3. Calcolare (giustificando i passaggi) il $\lim_{x \to 1} \int_0^{+\infty} t^x e^{-t^2} dt$.

Punti: 10+10+10, 15, 10.