Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2006/07

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5

Prova Scritta del 10 dicembre 2007

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 6

Prova Scritta del 10 dicembre 2007

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Sia $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1, sia I un intervallo, e sia $y\colon I \to \mathbb{R}$ tale che $y'(t) = F'(y(t))$.

a. Mostrare che $dF(y(t))/dt = y'(t)^2 \geq 0$.

b. Mostrare che $|y(t_1) - y(t_0)| \leq \sqrt{t_1 - t_0}\sqrt{F(y(t_1)) - F(y(t_0))}$ se $t_0 \leq t_1 \in I$. (Teorema fondamentale del calcolo e disuguaglianza di Hölder).

c. Supponiamo che F sia limitata. Mostrare che $t \mapsto y(t)$ è uniformemente continua.

2. Sia $\mathbb{U}$ il cerchio unitario di $\mathbb{C}$ e $F\colon \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ definita da $F(e^{it}) := t$ se $0 \leq t \leq \pi$, $F(e^{it}) := \pi + t$ se $-\pi < t < 0$. Indichiamo la base hilbertiana usuale di $L^2(\mathbb{U})$ con $u_n(z) := z^n$ per $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{U}$. Calcolare i coefficienti di Fourier di F rispetto alla base u_n.

3. Sia H uno spazio di Hilbert, D, M due sottospazi chiusi, e P_D, P_M le rispettive proiezioni ortogonali. Supponiamo che $P_D y \in M$ per ogni $y \in M$. Prendiamo $x \in D$.

a. Mostrare che $\|x - P_D P_M x\| = \|P_D(x - P_M x)\| \leq \|x - P_M x\|$.

b. Mostrare che $P_D P_M x$ è un punto di M non più distante da x di quanto lo sia $P_M x$.

c. Mostrare che $P_M x \in D$.

Punti: 5+15+10, 15, 8+8+8.