Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2006/07

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

# Analisi Matematica 6

Prova Scritta del 12 settembre 2007

Cognome e Nome:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Matricola:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

Documento d'identità (se chiesto):

| |
|---|
| |

Tempo a disposizione: 3 ore.

**1.** Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura con $0 < \mu(X) < +\infty$, e sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ misurabile, con $0 < \|f\|_\infty < +\infty$. Poniamo $a_p := \|f\|_p^p = \int_X |f|^p d\mu$ per $p \geq 1$.

**a.** Dimostrare che se $0 < \lambda < \|f\|_\infty$ e $p \geq 1$ allora

$$\|f\|_\infty \geq \frac{a_{p+1}}{a_p} \geq \frac{\|f\|_{p+1}}{\mu(X)^{1/(p+1)}} \geq \lambda \cdot \left( \frac{\mu\big(\{|f| > \lambda\}\big)}{\mu(X)} \right)^{1/(p+1)}.$$

(La prima disuguaglianza è ovvia; la seconda viene da Hölder applicata a $\int |f|^p$).

**b.** Dimostrare che $a_{p+1}/a_p \to \|f\|_\infty$ per $p \to +\infty$.

**2.** Sia $\mathbb{U}$ il cerchio unitario di $\mathbb{C}$ e $F\colon \mathbb{C} \setminus \{2\} \to \mathbb{C}$ definita da $F(z) := 1/(2-z)$. Indichiamo la base hilbertiana usuale di $L^2(\mathbb{U})$ con $u_n(z) := z^n$ per $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{U}$.

**a.** Mostrare che $F(z) = \sum_{n \geq 0} z^n/2^{n+1}$ se $|z| < 2$, e che la serie converge uniformemente su $\mathbb{U}$ (usare la somma della serie geometrica $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \ldots$).

**b.** Mostrare che $\langle F, u_n \rangle_{L^2} = 1/2^{n+1}$ se $n \geq 0$, e $\langle F, u_n \rangle_{L^2} = 0$ se $n < 0$.

**c.** Calcolare i coefficienti di Fourier della parte reale e della parte immaginaria di $F$ (ristretta ad $\mathbb{U}$).

**3.** Calcolare il

$$\lim_{n \to +\infty} \int_1^n \left(1 - \frac{2 \log t}{n}\right)^n dt.$$

(Usare la disuguaglianza $\log(1+x) \leq x$).

*Punti: 8+5, 8+8+8, 10.*