Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2006/07

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 6

Prova Scritta del 19 luglio 2007

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura con $\mu(X) < +\infty$, sia $f_n \colon X \to [0, +\infty[$ una successione di funzioni misurabili tali che $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ per ogni $x \in X$.

a. Posto $E_{n,m} := \{f_n \le f_m\}$, mostrare che $\lim_{m\to+\infty} \mu(E_{n,m}) = \mu(X)$ per ogni n.
(Applicare il lemma di Fatou alla successione di funzioni $m \mapsto \chi_{E_{n,m}}$, che tende puntualmente a...)

b. Sia $\varepsilon > 0$. Dimostrare che esiste $N_\varepsilon \in \mathcal{M}$ ed una sottosuccessione f_{n_k} tali che $\mu(N_\varepsilon) < \varepsilon$ e che per ogni $x \in X \setminus N_\varepsilon$ e ogni $k \in \mathbb{N}$ si abbia $f_{n_k}(x) \le f_{n_{k+1}}(x)$.
(Estrarre la sottosuccessione in modo che $\mu(X \setminus E_{n_k,n_{k+1}}) < \ldots$)

2. Sia $\mathbb{U}$ il cerchio unitario di $\mathbb{C}$ e $F \colon \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ definita da $F(x+iy) := |y|$ per $x, y \in \mathbb{R}$. Calcolare i coefficienti di Fourier di F rispetto alla usuale base hilbertiana $u_n(z) := z^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e $f \colon X \to \mathbb{R}$ misurabile. Chiameremo "immagine essenziale di f" l'insieme A degli $y \in \mathbb{R}$ tali che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che $\mu(\{t \in X : |f(t) - y| < \varepsilon\}) = \mu(f^{-1}(]y - \varepsilon, y + \varepsilon[)) > 0$.

a. Mostrare che A è chiuso in $\mathbb{R}$.
(Sia $y_n \in A$ tale che $y_n \to \bar{y}$; bisogna mostrare che $\bar{y} \in A$).

b. Un ricoprimento aperto di un intervallo di $\mathbb{R}$ ha sempre un sottoricoprimento numerabile.
(Banale se l'intervallo è compatto; altrimenti l'intervallo è l'unione di una famiglia numerabile (?) di compatti, per ciascuno dei quali si può estrarre...)

c. Mostrare che A è non vuoto se $\mu(X) > 0$.
(Altrimenti $\mathbb{R}$ si potrebbe ricoprire con una famiglia numerabile di palle con controimmagini trascurabili...)

d. Mostrare che $\sup A$ coincide coll'estremo superiore essenziale di f.
(Se $y > \sup \operatorname{ess} f$ allora esiste un intorno di y con contrimmagine trascurabile (?), per cui $y \notin A$...).

Punti: 8+15, 15, 8+5+8+8.