Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2006/07

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 6

Prova Scritta del 12 aprile 2007

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura con $\mu(X) = 1$. Siano $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ due funzioni misurabili, e $a < b$. Supponiamo che $f \geq a$ e $g \geq 0$ ovunque, che $\mu(\{f \geq b\}) \geq 1/2$ e $\mu(\{g \geq 1/4\}) \geq 3/4$, e infine che $\int_X g\, d\mu = 1$.

a. Mostrare che $\mu(\{f \geq b, g \geq 1/4\}) \geq 1/4$.

b. Mostrare che $\int_X fg\, d\mu$ è ben definito e che $\int_X fg\, d\mu \geq a + (b-a)/16$.

2. Per $t \in [0,1]$ poniamo $u_1(t) \equiv 1$, $u_2(t) := t - 1/2$, $u_3(t) := \min\{t, 1-t\} - 1/4$, e sia M il sottospazio vettoriale di $H := L^2([0,1])$ generato da u_1, u_2, u_3.

a. M è chiuso in H? Il sistema $\{u_1, u_2, u_3\}$ è ortonormale in H? Se no, trovare una base ortonormale di M.

b. Scrivere la formula esplicita della proiezione ortogonale di H su M. Trovare la proiezione ortogonale di $f(t) := t^2$ su M.

3. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e $f\colon X \to \mathbb{R}$ misurabile. Sia A l'insieme degli $y \in \mathbb{R}$ tali che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che $\mu(\{t \in X \,:\, |f(t) - y| < \varepsilon\}) > 0$.

a. Mostrare che A è chiuso in $\mathbb{R}$.

b. Mostrare che A è non vuoto se $\mu(X) > 0$.

c. Mostrare che $\sup A$ coincide coll'estremo superiore essenziale di f.

Punti: 6+6, 6+10, 6+8+8.