Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2006/07

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

# Analisi Matematica 6

Prova Scritta del 29 marzo 2007

Cognome e Nome:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Matricola:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

Documento d'identità (se chiesto):

| |
|---|
| |

Tempo a disposizione: 3 ore.

**1.** Sia $X$ un insieme e $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione. Poniamo $\mathcal{M} := \{f^{-1}(E) \ : \ E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, dove $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ è l'insieme dei boreliani di $\mathbb{R}$.

**a.** Dimostrare che $\mathcal{M}$ è una $\sigma$-algebra su $X$ e che $f$ è $\mathcal{M}$-misurabile.

**b.** Mostrare che $\chi_{f^{-1}(E)} = (\chi_E) \circ f$ se $E \subset \mathbb{R}$.

**c.** Se $E_1, \dots, E_n, \dots \subseteq \mathbb{R}$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots \geq 0$ allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \chi_{f^{-1}(E_n)} = \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \chi_{E_n} \right) \circ f.$$

**d.** Se $g\colon X \to [0, +\infty[$ è una funzione $\mathcal{M}$-misurabile, allora esiste una $\varphi\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ boreliana tale che $g = \varphi \circ f$. Inoltre su $f(X)$ la $\varphi$ è finita.
(Una funzione $\mathcal{M}$-misurabile positiva si può sempre scrivere come $g = \sum_n \lambda_n \chi_{F_n}$, con $F_n \in \mathcal{M}$, $\lambda_n \geq 0 \dots$)

**e.** Sia $g\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{M}$-misurabile. Dimostrare che esiste $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ boreliana tale che $g = \varphi \circ f$. Se $f(X) = \mathbb{R}$ allora $\varphi$ è unica.
(Applicare il caso precedente a $g^+$ e a $g^-$; l'insieme dei punti dove $\varphi^+ = \varphi^- = +\infty$ è boreliano...)

**2.** Calcolare il $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{n}{1 + x^3} \operatorname{sen} \frac{x+1}{n} \, dx$, giustificando il risultato.

**3.** Calcolare i coefficienti di Fourier rispetto alla base hilbertiana classica della funzione sul cerchio unitario che vale 1 nel primo quadrante e 0 altrove. Scrivere l'identità di Bessel corrispondente.

*Punti: 7+5+5+7+8, 15, 15.*