Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2005/06

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 6

Prova Scritta del 24 luglio 2006

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Sul cerchio unitario $\mathbb{U}$ di $\mathbb{C}$ consideriamo la classica base hilbertiana di $L^2(\mathbb{U})$ data da $u_n(z) := z^n$ per $n \in \mathbb{Z}$. Per $-\pi \leq x < \pi$ poniamo $F(e^{it}) := \min\{|x|, |x-\pi|, |x+\pi|\}$.

a. Mostrare che $F(z) = F(-z) = F(1/z)$ per ogni $z \in \mathbb{U}$. Dedurne che per i coefficienti di Fourier di F valgono le relazioni $\hat{F}(-n) = \hat{F}(n) = (-1)^n \hat{F}(n)$.

b. Calcolare i coefficienti di Fourier di F rispetto alla base $\{u_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

c. La serie di Fourier di F converge in L^2? Puntualmente? Uniformemente? A cosa?

d. Cosa dice l'identità di Bessel riguardo alla funzione F?

2. Per $f \in L^2(\mathbb{R})$ ed $x \in \mathbb{R}$ poniamo $(L_1 f)(x) := f(x) - f(-x)$, $(L_2 f)(x) := f(x) + f(-x)$.

a. Mostrare che L_1, L_2 sono ben definiti come operatori lineari continui da $L^2(\mathbb{R})$ in sé.

b. Mostrare che $\ker L_1$ (rispettivamente $\ker L_2$) è l'insieme delle funzioni pari (rispettivamente, dispari) a quadrato integrabile e coincide con l'immagine di L_2 (risp., di L_1).

c. Mostrare che $\ker L_1 = (\ker L_2)^\perp$. Quali sono le proiezioni ortogonali associate alla decomposizione in somma diretta?

Punti: 8+10+8+8, 5+5+10.