



Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 6

Prova Scritta del 3 aprile 2006

Cognome e Nome:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

Matricola:

| | | | | |
|--|--|--|--|--|
| | | | | |
|--|--|--|--|--|

Documento d'identità (se chiesto):

| |
|--|
| |
|--|

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Mostrare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{\alpha-1} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx.$$

(Si può usare la disuguaglianza $\log(1+t) \leq t \forall t > -1$).

2. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Dimostrare che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)| dx = 0.$$

(Fissato $\varepsilon > 0$ esiste $g_\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua a supporto compatto e tale che $\|f - g_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$; aggiungere e togliere termini opportuni dentro il valore assoluto...).

3. Sia $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Per $z \in \mathbb{C}$ poniamo $\varphi(z) = z$ se $z \in D$, $\varphi(z) = z/|z|$ altrimenti. Sia (X, \mathcal{M}, μ) uno spazio di misura, e poniamo $C := \{f \in L^2(\mu) : f(x) \in D \text{ per q.o. } x \in X\}$.

a. Mostrare che C è un sottinsieme convesso e chiuso di $L^2(\mu)$. È un sottospazio vettoriale?

b. Mostrare che per ogni $z \in \mathbb{C}$ il punto di D più vicino a z è $\varphi(z)$.

c. Sia $f \in L^2(\mu)$. Mostrare che l'elemento di C più vicino a f nella norma di $L^2(\mu)$ è $\varphi \circ f$.

Punti: 15, 15, 5+5+5.