Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2005/06

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 6

Prova Scritta del 20 marzo 2006

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Sia $[a, b]$ un intervallo compatto di $\mathbb{R}$, $c, d \in \mathbb{R}$, $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Sia X l'insieme delle funzioni $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ di classe C^1 e tali che $f(a) = c$, $f(b) = d$. Per tali f poniamo $\Phi(f) := \int_a^b \varphi(f'(x))dx$.

a. Mostrare che per ogni $f \in X$ vale la disuguaglianza

$$\Phi(f) \geq (b-a)\varphi\Big(\frac{d-c}{b-a}\Big).$$

(Usare la disuguaglianza di Jensen).

b. Mostrare che la funzione Φ su X ha minimo globale, che viene raggiunto quando f è lineare (affine).

c. Mostrare che fra le funzioni di X, quella il cui grafico ha minima lunghezza è quella lineare (affine).
(Scegliere $\varphi(x) = \sqrt{1 + x^2} \dots$).

2. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura positiva, $f \in L^1(\mu)$, $f \geq 0$, con $\int_X f\, d\mu > 0$. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X n\Big(\sqrt{1 + \frac{f}{n^\alpha}} - 1\Big)d\mu$$

in funzione del parametro $\alpha > 0$.
(Se $\alpha \geq 1$ mostrare che l'integrando è dominato da f).

3. Mostrare che l'insieme delle funzioni continue, lineari a tratti e a supporto compatto è denso in $L^p(\mathbb{R})$ se $1 \leq p < +\infty$.
(Usare il teorema di Lusin e l'uniforme continuità).

Punti: 5+5+5, 15, 15.