Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2004/05

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 6

Prova Scritta del 5 settembre 2005

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Sia $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$ il cerchio unitario di $\mathbb{C}$, con l'usuale misura normalizzata. Poniamo $f(t) := F(e^{it})$ per $t \in \mathbb{R}$. Sia $F\colon \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ una funzione, e sia F' la derivata di F nel senso del limite del rapporto incrementale: $F'(z) := \lim_{w \to z}(F(w) - F(z))/(w - z)$, derivata che supponiamo esistere finita per ogni $z \in U$.

a. Mostrare che f è derivabile e $f'(t) = F'(e^{it})ie^{it}$.

b. Siano $F, G\colon \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ derivabili con derivata continua. Dimostrare che la formula di "integrazione per parti" è

$$\int_{\mathbb{U}} F'(z)G(z)\,dz = -\int_{\mathbb{U}} F(z)G'(z)\,dz + \int_{\mathbb{U}} \frac{F(z)G(z)}{z}dz\,.$$

(Riscrivere in termini di integrali su $\mathbb{R}$).

c. Sia $F\colon \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ derivabile con derivata continua. Siano $\hat{F}(n)$, $\widehat{F'}(n)$ i coefficienti di Fourier di F ed F' rispetto alla base hilbertiana usuale $\{z^n \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$. Dimostrare che $\widehat{F'}(n) = (n+1)\hat{F}(n+1)$.

2. a. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e $E_n \in \mathcal{M}$ tale che $\sum_n \mu(E_n) < +\infty$. Allora per quasi ogni $x \in X$ l'insieme degli n per i quali $x \in E_n$ è finito.
(Mostrare che $\sum_n \chi_{E_n}$ è una funzione con integrale finito).

b. Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile secondo Lebesgue e a supporto compatto. Dimostrare che esiste una successione di funzioni $g_n\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue a supporto compatto tali che per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha $g_n(x) = f(x)$ per ogni n abbastanza grande.
(Applicare il teorema di Lusin scegliendo una successione opportuna di ε e applicando il punto precedente).

Punti: 4+8+8, 8+12.