Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2004/05

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 6

Prova Scritta del 12 aprile 2005

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

Sia $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$ il cerchio unitario di $\mathbb{C}$, con l'usuale misura normalizzata.

1. Sia $F\colon \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ una funzione. Poniamo $f(t) := F(e^{it})$ per $t \in \mathbb{R}$. Ci proponiamo di dimostrare che se una delle due fra F e f è lipschitziana lo è anche l'altra.

a. Se $t \in \mathbb{R}$ allora $|e^{it} - e^{-it}| = 2|\operatorname{sen} t| \le |2t|$, e se $|t| \le \pi/2$ allora $|e^{it} - e^{-it}| \ge 4|t|/\pi$. (Suggerimento: $x \mapsto \operatorname{sen} x$ è concava su $[0, \pi/2]\ldots$).

b. Se $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ allora $|e^{it_1} - e^{it_2}| \le |t_1 - t_2|$, e se inoltre $|t_1 - t_2| \le \pi$ allora $|e^{it_1} - e^{it_2}| \ge 2|t_1 - t_2|/\pi$. (Raccogliere $e^{i(t_1+t_2)/2}$, che ha norma $1\ldots$)

c. Mostrare che se $|F(z_1) - F(z_2)| \le M|z_1 - z_2|$ per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ allora $|f(t_1) - f(t_2)| \le M|t_1 - t_2|$ per ogni $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

d. Mostrare che se $|f(t_1) - f(t_2)| \le M|t_1 - t_2|$ per ogni $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ allora $|F(z_1) - F(z_2)| \le (M\pi/2)|z_1 - z_2|$ per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$.
(Dati $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ possiamo scrivere $z_1 = e^{it_1}$ e $z_2 = e^{it_2}$ con $|t_1 - t_2| \le \pi\ldots$).

2. Sia $k \mapsto n_k$ una successione fissata di numeri interi tendente a $+\infty$. Sia E l'insieme degli $z \in \mathbb{U}$ per i quali la successione $k \mapsto z^{n_k}$ ha limite, e sia $F(z)$ tale limite.

a. Sia $A \subseteq \mathbb{U}$ misurabile. Dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} \int_A z^n \, dz = 0$.
(Scrivere $\int_A z^n \, dz$ come coefficiente di Fourier di un'opportuna funzione...)

b. Dimostrare che E è un boreliano di $\mathbb{U}$ e che $F\colon E \to \mathbb{C}$ è una funzione boreliana.

c. Dimostrare che F è quasi ovunque nulla su E.
(Con A un qualsiasi sottinsieme misurabile di E, integrare z^{n_k} su A e passare al limite per $k \to +\infty$ usando il punto **a**).

d. Dimostrare che E ha misura nulla. (Integrare $1 = |z^{n_k}|$ su E, e passare al limite...).

3. Sia $F\colon \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $F(e^{it}) := t$ se $0 \le t < \pi$, e $F(e^{it}) := 2\pi - t$ se $\pi \le t < 2\pi$. Calcolare i coefficienti di Fourier $\hat{F}(n)$ di F rispetto alla usuale base hilbertiana $u_n(z) := z^n$, $n \in \mathbb{Z}$ di $L^2(\mathbb{U})$. Esprimere la somma parziale $S_N(e^{it}) := \sum_{n=-N}^{N} \hat{F}(n) u_n(e^{it})$ in termini di sole funzioni reali di $t \in \mathbb{R}$. Le somme parziali S_N convergono uniformemente su $\mathbb{U}$ per $N \to +\infty$? Il limite puntuale delle S_N è uguale a F quasi ovunque? Anche in ogni punto?

Punti: 8+5+5+8, 8+12+8+8, 20.