Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2004/05

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 6

Prova Scritta del 30 marzo 2005

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Consideriamo la successione di funzioni

$$f_n(x) := \left(1 + \frac{nx}{n^2+2}\right)^n .$$

Sia $g(x,n) := (\partial \ln f_n(x))/(\partial n)$ (considerata n come variabile reale).

a. Mostrare che $g(x,1)$ è una funzione crescente e positiva di x per $x \geq 0$.

b. Mostrare che, per $x \geq 0$ fissato, $g(x,n)$ è una funzione crescente di n per $n \geq 1$.

c. Mostrare che $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ per ogni $x \geq 0$, $n \geq 1$.

d. Calcolare il

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{f_n(x)}\, dx ,$$

giustificando i passaggi.

2. Siano $\{u_\alpha \ : \ \alpha \in A\}$ e $\{v_\beta \ : \ \beta \in B\}$ due famiglie (anche non ortogonali) di vettori in uno spazio di Hilbert H e tali che $\sum_\alpha \|u_\alpha\| < +\infty$, $\sum_\alpha \|v_\beta\| < +\infty$, e poniamo $x := \sum_\alpha u_\alpha$, $y := \sum_\beta v_\beta$. Dimostrare che la famiglia dei prodotti scalari a due a due $\{(u_\alpha \mid v_\beta) \ : \ (\alpha,\beta) \in A \times B\}$ è sommabile in $\mathbb{C}$ e vale l'uguaglianza

$$(x \mid y) = \sum_{(\alpha,\beta)\in A\times B} (u_\alpha \mid v_\beta) .$$

3. Calcolare i coefficienti della serie di Fourier della funzione F definita sul cerchio unitario $\mathbb{U}$ di $\mathbb{C}$ da $F(e^{it}) := t(t-2\pi)$, $t \in [0, 2\pi[$, rispetto alla base ortonormale $u_n(z) := z^n$, $n \in \mathbb{Z}$. La serie di Fourier di F converge in $L^2(\mathbb{U})$? Le somme parziali convergono puntualmente? Uniformemente?

Punti: 5+8+8+8, 15, 18.