Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2003/04

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 6

Prova Scritta del 15 marzo 2004

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Consideriamo la successione di funzioni

$$f_n(x) := \frac{4n^2 - n}{16n^4 - n^2 + (x^2 - n)^2}.$$

a. Mostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \geq 1$ vale l'uguaglianza

$$\frac{1}{2x^2} - f_n(x) = \frac{(x^2 - 4n^2)^2}{2x^2\big(16n^4 - n^2 + (x^2 - n)^2\big)}\,.$$

b. Mostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \geq 1$ si ha che $f_n(x) \leq 1/5$.

c. Mostrare che $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ e calcolare il

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx\,.$$

2. Sia X un insieme e $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione. Poniamo $\mathcal{M} := \{f^{-1}(E) \ : \ E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, dove $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ è l'insieme dei boreliani di $\mathbb{R}$.

a. Dimostrare che $\mathcal{M}$ è una σ-algebra su X e che f è $\mathcal{M}$-misurabile.

b. Mostrare che $\chi_{f^{-1}(E)} = (\chi_E) \circ f$ se $E \subset \mathbb{R}$.

c. Se $E_1, \ldots, E_n \subset \mathbb{R}$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ allora

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{f^{-1}(E_k)} = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{E_k}\right) \circ f.$$

d. Se $\varphi_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una successione di funzioni che converge puntualmente a $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, allora $\varphi_n \circ f$ converge puntualmente a $\varphi \circ f$.

e. Sia $g\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{M}$-misurabile. Dimostrare che esiste $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ boreliana tale che $g = \varphi \circ f$.
(Cominciare dal caso in cui g è funzione $\mathcal{M}$-semplice...)

Punti: 8+5+10, 8+4+4+4+8.