Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2002/03

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica (nuovo ordinamento)

Analisi Matematica 6

Prova Scritta del 24 luglio 2003

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Consideriamo la funzione $F(x) := \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan(t+2x)}{1+t^2}\,dt$.

a. Trovare l'insieme D dei valori di $x \in \mathbb{R}$ per i quali la $F(x)$ è ben definita e a valori finiti.

b. La F è continua su D? Trovare i limiti di F agli estremi di D.

c. La F è derivabile su D? Qual'è la derivata?

d. Dimostrare che $F(x) = \pi \arctan x$ per tutti gli $x \in \mathbb{R}$.
(Integrare F').

2. Sia $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che per ogni (x,y) esista finito il

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ hk\neq 0}} \frac{F(x+h,y+k)-F(x+h,y)-F(x,y+k)+F(x,y)}{hk} =: f(x,y)\,.$$

a. Dimostrare che per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta(x,y) > 0$ tale che se $|h| < \delta(x,y)$ e $|k| < \delta(x,y)$ allora $|F(x+h,y+k) - F(x+h,y) - F(x,y+k) + F(x,y) - f(x,y)hk| < \varepsilon hk$.

b. Riprendiamo gli ε, δ del punto **a**. Se $R = [a_1,a_2] \times [b_1,b_2]$ con punto marcato (x,y) è un rettangolo adattato a δ, dimostrare che $|F(a_2,b_2) - F(a_2,b_1) - F(a_1,b_2) + F(a_1,b_1) - f(x,y)\,\mathrm{vol}(R)| < \varepsilon\,\mathrm{vol}(R)$.

c. Se Π è una suddivisione "a griglia" di $[0,1]\times[0,1]$, adattata alla δ dei punti precedenti, e $S(f,\Pi)$ è la relativa somma di Riemann, allora $|F(1,1) - F(1,0) - F(0,1) + F(0,0) - S(f,\Pi)| < \varepsilon$.

d. Generalizzare il punto **c** al caso di suddivisioni non necessariamente a griglia. Concludere che f è integrabile secondo Henstock-Kurzweil su $[0,1]\times[0,1]$, e l'integrale vale $F(1,1) - F(1,0) - F(0,1) + F(0,0)$.

e. Se F è di classe C^2 allora $f(x,y)$ esiste ed è la derivata seconda mista $\partial^2 f/(\partial x \partial y)$.
(Si può usare per esempio il teorema del valor medio di Lagrange).

f. Se $G, H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono funzioni derivabili ovunque (non necessariamente con derivata continua), allora la funzione $F(x,y) := G(x)H(y)$ verifica le ipotesi di cui sopra, con $f(x,y) = G'(x)H'(y)$. Concludere che la funzione $(x,y) \mapsto G'(x)H'(y)$ è integrabile su $[0,1]\times[0,1]$ e $\int_{[0,1]\times[0,1]} G'(x)H'(y)\,dx\,dy = \big(G(1)-G(0)\big)\big(H(1)-H(0)\big)$.

Punti: 5+7+7+10, 5+5+10+10+10+10.