Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2002/03

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore II, Analisi 6

Prova Scritta del 31 marzo 2003

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Sono dati due numeri $\alpha, \beta > 0$. Poniamo $f_\alpha(x,y) := 1/x^\alpha$ se $x \neq 0$, $f_\alpha(x,y) := 0$ se $x = 0$, $E_\beta := \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] \ : \ 0 \leq y \leq x^\beta\}$. Dire per quali valori di α, β la f_α è integrabile su E_β.

2. Mostrare che l'insieme $E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x^2 + 3y^2 \leq z \leq 1 + x^2 + y^2\}$ è misurabile limitato in $\mathbb{R}^2$ e calcolarne il volume.
(Può convenire fare prima il cambio di variabili $x = u$, $y = v/\sqrt{2}$, e poi passare in coordinate cilindriche).

3. Sia I un rettangolo in $\mathbb{R}^2$ e $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Fissati $(x_0, y_0) \in I$ ed $\varepsilon > 0$, sia $\delta = \delta_\varepsilon(x_0, y_0) > 0$ tale che se $(x,y) \in I$ e $|x - x_0| \leq \delta$, $|y - y_0| \leq \delta$ allora $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq \varepsilon$.

a. Fissati $(x_0, y_0) \in I$, $\varepsilon > 0$ e $\delta = \delta_\varepsilon(x_0, y_0) > 0$, sia $J := [a', a''] \times [b', b''] \subset I$. Dimostrare che se $x_0 - \delta \leq a' \leq x_0 \leq a'' \leq x_0 + \delta$, $y_0 - \delta \leq b' \leq y_0 \leq b'' \leq y_0 + \delta$, allora

$$\left| f(x_0, y_0)\mu(J) - \int_J f \right| \leq \varepsilon \mu(J) \, .$$

b. Fissati $\varepsilon > 0$ e il calibro δ di cui sopra, e presa una suddivisione Π di I adattata a δ, dimostrare che $|S(I, f, \Pi) - \int_I f| < \varepsilon \mu(I)$.
(Spezzare l'integrale su I nella somma degli integrali sui rettangolini della suddivisione).

Punti: 10, 10, 8+8.