Università degli Studi di Udine Anno Accademico 1999/2000

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo
Programma

Prof. Gianluca Gorni

Testi di riferimento: Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill (traduzione italiana presso Boringhieri). Giuseppe De Marco, *Analisi Due* (prima edizione), Decibel-Zanichelli. Appunti del corso. Materiale didattico attinente al corso è anche disponibile presso

`http://www.dimi.uniud.it/~gorni`

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

Regolamento d'esame: Chi intende fare gli esami di entrambi i moduli può scegliere fra due scritti separati o il solo scritto del secondo modulo; in quest'ultimo caso il voto scritto vale per entrambi gli orali. Lo studente riceve solo il testo del modulo che ha scelto per quell'appello e ha tre ore di tempo. Gli scritti possono essere ripetuti senza limitazioni, ma ogni scritto consegnato annulla i precedenti. Chi ha superato lo scritto a un appello può dare l'orale in qualsiasi appello, o anche su appuntamento individuale.

1. Misura e integrazione astratte.

Rudin, cap. 1

Difetti dell'integrale secondo Riemann. Richiami sulla definizione di integrale di Riemann. Passaggio al limite sotto il segno dell'integrale nel caso di convergenza uniforme. Teorema della convergenza limitata per l'integrale di Riemann (solo enunciato). L'insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann non è stabile per convergenza puntuale limitata. L'integrale di Riemann è intrinsecamente incompleto rispetto alla convergenza puntuale limitata. Altre manchevolezze della teoria di Riemann.

σ-algebre, spazi misurabili e funzioni misurabili. Definizione di σ-algebra, spazio misurabile e funzione misurabile, raffrontata alla definizione di topologia, spazio topologico e funzione continua. Le σ-algebre sono stabili per unioni e intersezioni numerabili o finite, e per differenze. Se f, g sono funzioni reali misurabili e $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è continua, allora la funzione $x \mapsto \Phi(f(x), g(x))$ è misurabile. Ogni aperto di $\mathbb{R}^2$ è unione di una famiglia numerabile di rettangoli aperti. Una funzione complessa è misurabile se e solo se sono misurabili la sua parte reale e la sua parte immaginaria. Somma e prodotto di funzioni misurabili reali o complesse sono misurabili. Funzione caratteristica di un insieme misurabile. Decomposizione polare di una funzione misurabile complessa. L'intersezione di una famiglia di σ algebre su un insieme è ancora una σ-algebra su quell'insieme. La σ-algebra su X generata da una famiglia di sottinsiemi di X. Esempi di σ-algebre su insiemi finiti. La σ-algebra dei boreliani di uno spazio topologico. Gli intervalli sono boreliani di $\mathbb{R}$. I boreliani di $\mathbb{R}$ sono generati dagli aperti, o dai chiusi, o dagli intervalli, o dalle semirette. Le famiglie di insiemi F_σ e G_δ. Cenno alla costruzione dei boreliani e ai sottinsiemi non boreliani di $\mathbb{R}$. Funzioni boreliane. La funzione "parte intera" è boreliana. Immagine di una σ-algebra tramite una funzione. Espressione della misurabilità di una funzione in termini di contrimmagini dei boreliani. Misurabilità di una funzione reale estesa in termini di contrimmagini di semirette. Composizione di una funzione misurabile con una boreliana. Data una successione di funzioni reali estese misurabili, anche l'estremo superiore, l'estremo inferiore, il minimo limite e il massimo limite della successione sono misurabili. Se una successione di funzioni complesse misurabili converge puntualmente, anche il limite è misurabile. Parte positiva e parte negativa di una funzione reale.

Funzioni semplici. Funzioni semplici misurabili. Non unicità della scrittura come combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche. *Ogni funzione reale estesa* ≥ 0 *è limite puntuale di una successione crescente di funzioni semplici misurabili non negative. Ogni funzione reale* ≥ 0 *è scrivibile come combinazione lineare numerabile di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili, a coefficienti* ≥ 0. Interpretazione geometrica della costruzione. Interpretazione in termini di espansioni in base 2.

Misure su spazi misurabili. Definizione di misura su uno spazio misurabile e definizione di spazio di misura. Prime proprietà delle misure: il vuoto ha misura nulla, la misura è finitamente additiva e monotona, passaggio al limite su successioni monotone di insiemi. Regole dell'aritmetica su $[0, +\infty]$.

Integrale di funzioni misurabili positive. Definizione di integrale di una funzione semplice misurabile e positiva su un insieme misurabile rispetto a una misura. Prime proprietà dell'integrale delle funzioni semplici positive. Definizione dell'integrale delle funzioni misurabili positive. Prime proprietà: monotonia rispetto alla funzione e rispetto all'insieme, condizione perché l'integrale non sia nullo, moltiplicazione per una costante in $[0, +\infty]$. $\int_E f \, d\mu = \int_X f \chi_E \, d\mu$. *Teorema della convergenza monotona.* Additività dell'integrale di funzioni positive. Integrazione per serie di funzioni positive. L'integrale nel caso della misura nulla, della misura concentrata in un punto, della misura del conteggio su $\mathbb{N}$. *Il lemma di Fatou.* La misura definita da $E \mapsto \int_E f \, d\mu$ per $f \geq 0$ misurabile.

Integrale di funzioni reali o complesse e lo spazio normato $L^1(\mu)$. Definizione di $L^1(\mu)$ e di integrale per funzioni di $L^1(\mu)$ a valori reali o complessi. Linearità dell'integrale di funzioni di $L^1(\mu)$. Funzioni semiintegrabili a valori reali estesi. La disuguaglianza $|\int f| \leq \int |f|$. *Il teorema della convergenza dominata.* Le misure sono numerabilmente subadditive. Insiemi trascurabili. Funzioni che coincidono μ-quasi ovunque. Proprietà dell'uguaglianza quasi ovunque rispetto all'integrale e alla convergenza puntuale. Funzioni misurabili definite quasi ovunque. Spazi di misura completi e non completi. Teorema del completamento di uno spazio di misura. Alcune condizioni sugli integrali che si equivalgono a proprietà quasi ovunque delle funzioni. $L^1(\mu)$ come spazio vettoriale (semi)normato. Integrazione per serie nel caso $\sum \|f_n\|_1 < +\infty$. Successioni a variazione limitata in uno spazio metrico. Una successione di Cauchy ha sempre una sottosuccessione a variazione limitata. Uno spazio metrico è completo se e solo se ogni successione di Cauchy ha una sottosuccessione limitata. *Lo spazio normato $L^1(\mu)$ è completo.* Il corrispettivo di L^1 per l'integrale secondo Riemann non è completo. Esempi che mostrano come la convergenza puntuale quasi ovunque e la convergenza in L^1 sono indipendenti. Confronti fra convergenza quasi ovunque, in L^1, dominata, uniforme, a variazione limitata. Esercizi sulla misura e integrazione astratta.

2. Misure boreliane positive

Rudin cap. 2. De Marco VII.5, VI.1-2. Appunti del corso

Introduzione e preliminari topologici. Introduzione alla misura di Lebesgue: il problema di trovare uno spazio di misura su $[0,1]$ in modo tale che l'integrazione rispetto a quello spazio estenda l'integrazione secondo Riemann per le funzioni dove quest'ultima ha senso. Richiami di topologia generale: insiemi compatti, spazi di Hausdorff e spazi localmente compatti. Un chiuso contenuto in un compatto è compatto. In uno spazio di Hausdorff un compatto e un punto fuori hanno intorni disgiunti. Proprietà dell'intersezione vuota di compatti. *In uno spazio di Hausdorff localmente compatto fra un compatto e un aperto che lo contiene possiamo inserire un aperto a chiusura compatta.* Definizione di funzioni semicontinue inferiormente e superiormente. Caratterizzazione della semicontinuità inferiore in termini di epigrafico. Caratterizzazione della semicontinuità in termini di minimo e massimo limite (cenno). Semicontinuità di un inviluppo superiore o inferiore di una famiglia di funzioni semicontinue. Semicontinuità della somma di funzioni semicontinue. Supporto di una funzione e funzioni continue a supporto compatto. Le notazioni $K \prec f \prec V$. *Il lemma di Urysohn.* Partizione continua dell'unità.

Teorema di rappresentazione di Riesz. *Teorema di Rappresentazione di Riesz.* Enunciato e primi commenti. Unicità della misura data la σ-algebra. Costruzione di μ e di $\mathcal{M}$ a partire dal funzionale lineare positivo $\Lambda: C_c(X) \to \mathbb{C}$. Monotonia di μ e completezza dello spazio di misura. Subadditività numerabile di μ. Dimostrazione che $\mathcal{M}$ è una σ-algebra e che μ è una misura su $\mathcal{M}$. Dimostrazione che $\Lambda f = \int_X f \, d\mu$ per ogni $f \in C_c(X)$.

Regolarità interna ed esterna delle misure boreliane. Regolarità interna ed esterna di misure boreliane. Insiemi σ-compatti e spazi di misura σ-finita. *Rafforzamento del teorema di rappresentazione di Riesz nell'ipotesi che lo spazio topologico sia σ-compatto. Rafforzamento del teorema di rappresentazione di Riesz nell'ipotesi che ogni aperto dello spazio topologico sia σ-compatto.*

La misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^k$. Preliminari alla misura di Lebesgue: scatole, griglie e cubi. *Teorema di esistenza della misura di Lebesgue.* Esistono insiemi misurabili secondo Lebesgue che non sono boreliani (cenno). *L'insieme non misurabile di Vitali.* Cenno all'esistenza di "misure finitamente additive" e invarianti per traslazione definite sui sottinsiemi limitati di $\mathbb{R}$. Cenno al paradosso di Banach-Tarski. L'insieme ternario di Cantor: definizione, corrispondenza biunivoca con l'insieme delle successioni a valori in $\{0,2\}$, funzione di Vitali (scalinata del demonio).

Relazioni fra integrale di Riemann e di Lebesgue. L'integrale secondo Riemann rivisitato dal punto di vista dell'integrale di Lebesgue. Funzioni a gradino, integrale inferiore e superiore di Riemann e definizione di integrabilità secondo Riemann. *Le funzioni integrabili secondo Riemann sono limitate, a supporto compatto, misurabili secondo*

Lebesgue, e i due integrali coincidono. Oscillazione di una funzione in un punto e sua relazione con la continuità. *Teorema di Vitali-Lebesgue* sulle funzioni integrabili secondo Riemann.

Integrali dipendenti da un parametro. Integrali dipendenti da parametro. Esempio di una funzione continua rispetto al parametro il cui integrale non è continuo. Teorema generale di continuità. Caso speciale di integrale di una integrale su un intervallo compatto di una funzione continua nella coppia. Esempio. Teorema di continuità per un integrale di una funzione continua su intervalli variabili. Teorema generale di derivabilità sotto il segno di integrale. Teorema di derivabilità dell'integrale di una funzione C^1 su un intervallo compatto fisso o variabile. Esempio. *Dimostrazione che* $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ *usando gli integrali dipendenti da parametro.* Definizione della funzione Gamma di Eulero-Legendre. *Proprietà della funzione Gamma*: continuità, derivabilità, limiti agli estremi, formula fondamentale $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, valori notevoli, $\Gamma(n) = (n-1)!$. Cenno alla funzione Gamma di variabile complessa e alla sua estensione a $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$. La funzione Beta. Formule alternative per la funzione Beta. Calcolo dell'integrale di Laplace $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \cos(2tx) dt$. Studio di integrali impropri dipendenti da parametro.

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

Per il teorema contrassegnato da un asterisco si possono consultare libri e appunti durante l'orale.

1. Approssimazione di funzioni misurabili positive con successioni o serie di funzioni semplici misurabili.
2. Teorema della convergenza monotona.
3. Lemma di Fatou.
4. Teorema della convergenza dominata.
5. Completezza dello spazio normato $L^1(\mu)$.
6. Dato un compatto K e un aperto V che lo contiene esiste un aperto contenente K e la cui chiusura è compatta e contenuta in V.
7. Lemma di Urysohn.
8. * Teorema di rappresentazione di Riesz.
9. Rafforzamenti del teorema di Riesz in ipotesi di σ-compattezza dello spazio, o di σ-compattezza di tutti i suoi aperti.
10. Costruzione della misura di Lebesgue n-dimensionale usando il teorema di rappresentazione di Riesz.
11. L'insieme non misurabile di Vitali.
12. Le funzioni integrabili secondo Riemann sono misurabili e integrabili secondo Lebesgue, con lo stesso integrale.
13. Teorema di Vitali-Lebesgue.
14. Calcolo dell'integrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$ usando gli integrali dipendenti da un parametro.
15. Proprietà della funzione Gamma.