Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo Programma

Prof. GIANLUCA GORNI

Testi di riferimento: WALTER RUDIN, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill (traduzione italiana presso Boringhieri). GIUSEPPE DE MARCO, *Analisi Due*, Decibel-Zanichelli. Appunti del corso. Materiale didattico attinente al corso è anche disponibile presso
`http://www.dimi.uniud.it/~gorni`

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

Regolamento d'esame: Chi intende fare gli esami di entrambi i moduli può scegliere fra due scritti separati o il solo scritto del secondo modulo; in quest'ultimo caso il voto scritto vale per entrambi gli orali. Lo studente riceve solo il testo del modulo che ha scelto per quell'appello e ha tre ore di tempo. Gli scritti possono essere ripetuti senza limitazioni, ma ogni scritto consegnato annulla i precedenti. Chi ha superato lo scritto a un appello può dare l'orale in qualsiasi appello, o anche su appuntamento individuale.

1. Misura e integrazione astratte.

Rudin, cap. 1

Difetti dell'integrale secondo Riemann. Richiami sulla definizione dell'integrale secondo Riemann e di integrale improprio. Per le successioni di funzioni, la convergenza puntuale non conserva l'integrabilità secondo Riemann. Cenno al teorema della convergenza limitata: se una successione di funzioni integrabili secondo Riemann è equilimitata e converge puntualmente, allora gli integrali convergono anche se la funzione limite non è integrabile. Inadeguatezza dell'integrale di Riemann a trattare la convergenza degli integrali.

σ-algebre, spazi misurabili e funzioni misurabili. Spazi misurabili: definizione di σ-algebra, insiemi misurabili, funzioni misurabili. Prime proprietà: l'insieme vuoto è misurabile, unioni e intersezioni finite e numerabili di insiemi misurabili sono misurabili, la differenza di insiemi misurabili è misurabile. Composizione di una funzione misurabile con una funzione continua è misurabile. Ogni aperto di $\mathbb{R}^2$ è unione di una famiglia numerabile di rettangoli aperti. Una funzione a valori in $\mathbb{R}^2$ è misurabile se e solo se sono misurabili le componenti. Una funzione complessa è misurabile se e solo se sono misurabili la parte reale e la parte immaginaria. Somma, prodotto e valore assoluto di funzioni misurabili sono misurabili. Funzioni caratteristiche e loro misurabilità. Decomposizione polare di una funzione misurabile complessa. Esempi di σ-algebre.

Esistenza della σ-algebra generata da una famiglia di sottinsiemi di un insieme. La σ-algebra dei boreliani di uno spazio topologico. Le famiglie F_σ e G_δ di Hausdorff. Gli intervalli semiaperti di $\mathbb{R}$ sono boreliani. Ogni aperto di $\mathbb{R}$ è unione di una famiglia al più numerabile di intervalli aperti a due a due disgiunti. La famiglia dei boreliani di $\mathbb{R}$ è generata dalla famiglia degli intervalli aperti, o dalla famiglia delle semirette aperte. Funzioni boreliane fra due spazi topologici. La σ-algebra immagine di una σ-algebra tramite una funzione. Una funzione è boreliana se e solo se la controimmagine di ogni boreliano è boreliana.

Reali estesi, successioni di funzioni misurabili, funzioni semplici. L'insieme $[-\infty, +\infty]$ dei numeri reali estesi: topologia e boreliani. Una funzione a valori reali estesi è misurabile se e solo se la contrimmagine di tutte le semirette del tipo $]a, +\infty]$ è misurabile. La composizione di una funzione misurabile con una boreliana è misurabile. L'estremo superiore e l'estremo inferiore di una successione di funzioni reali estese misurabili sono misurabile. Richiami sul massimo e il minimo limite di una successione di numeri reali estesi. Il massimo e il minimo limite di una successione di funzioni reali estese misurabili è misurabile. Il limite puntuale di una successione di funzioni reali estese misurabili è misurabile. Funzioni semplici: definizione e forma canonica. Le funzioni semplici sono le combinazioni lineari di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili. Espansione binaria dei numeri reali positivi: troncamenti e cifre binarie, e loro espressione in termini di parte intera. *Approssimazione uniforme di funzioni misurabili positive e limitate con successioni crescenti di funzioni semplici. Approssimazione puntuale di funzioni misurabili positive con successioni crescenti di funzioni semplici. Le funzioni misurabili positive sono combinazioni lineari numerabili di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili.*

Misure su spazi misurabili. Definizione di misura positiva su una σ-algebra. Prime proprietà: la misura del vuoto è zero, additività finita, monotonia, passaggio al limite su successioni crescenti di insiemi. Passaggio al limite su successioni decrescenti di insiemi. Esempi di misure: misura nulla, misura concentrata in un punto, misura del conteggio, primo cenno alla misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$. Aritmetica su $[0, +\infty]$.

Integrale di funzioni misurabili positive. Definizione di integrale di una funzione semplice positiva. Prime proprietà. Definizione di integrale per una funzione misurabile positiva. Prime proprietà. *Teorema della convergenza monotona.* Integrale della somma di due funzioni misurabili positive. Integrale per serie di funzioni positive. Caratterizzazione dell'integrale nei casi di misura identicamente nulla, di misura concentrata in un punto, di misura del conteggio. Alcune proprietà delle serie di numeri positivi dedotte come casi particolari della teoria dell'integrale. *Lemma di Fatou.* La misura definita da $\varphi(E) := \int_E f\, d\mu$ con f misurabile positiva.

Integrale di funzioni reali o complesse e lo spazio normato $L^1(\mu)$. Definizione di $L^1(\mu)$ e di integrale per funzioni di tale insieme. L'insieme $L^1(\mu)$ è uno spazio vettoriale e l'integrale è un funzionale lineare su $L^1(\mu)$. La disuguaglianza $|\int f| \leq \int |f|$. La funzione reale $f \mapsto \int |f|$ è una (semi)norma su $L^1(\mu)$. L'integrale nel caso della misura del conteggio e le serie convergenti assolutamente. *Il teorema della convergenza dominata.* Insiemi di misura nulla, o trascurabili. L'integrale non vede modifiche della funzione su un insieme trascurabile. Uguaglianza "quasi ovunque" di funzioni. Come rendere $L^1(\mu)$ uno spazio normato e non più soltanto seminormato. Funzioni definite quasi ovunque. Spazi di misura completi e completamento di uno spazio di misura. Integrazione per serie nel caso in cui la somma delle norme in L^1 sia finita. *Lo spazio normato $L^1(\mu)$ è completo.* Convergenza in L^1 e convergenza puntuale. Una funzione di L^1 è quasi ovunque nulla se e solo se ha integrali nulli su tutti gli insiemi misurabili. Condizione necessaria e sufficiente perché $|\int f| = \int |f|$. Un teorema sulle medie integrali. Se la somma delle misure di una famiglia numerabile di insiemi misurabili è finita, allora quasi nessun elemento appartiene a infiniti di quegli insiemi. Esercizi sulla misura e integrazione astratta.

2. Misure boreliane positive

Rudin cap. 2. De Marco VII.5, VI.1-2. Appunti del corso

Introduzione e preliminari topologici. Introduzione alle misure su spazi topologici. Richiami di topologia generale su intorni e compatti. Un chiuso contenuto in un compatto è compatto. In uno spazio di Hausdorff un compatto e un punto esterno hanno intorni disgiunti. Proprietà dell'intersezione finita. *In uno spazio di Hausdorff localmente compatto, dato un compatto K contenuto in un aperto U esiste un aperto V contenente K la cui chiusura $\bar{V}$ è compatta e contenuta in U.* Funzioni semicontinue superiormente o inferiormente su uno spazio topologico e prime proprietà. Supporto di una funzione reale o complessa definita su uno spazio topologico. Lo spazio vettoriale $C_c(X)$ delle funzioni continue a supporto compatto. Se $f \in C_c(X)$ allora $f(X)$ è compatto. La notazione $K \prec f \prec V$. *Il lemma di Urysohn.* Cenni a una dimostrazione alternativa del lemma di Urysohn nel caso di $\mathbb{R}^n$. Teorema delle partizioni continue dell'unità.

Teorema di rappresentazione di Riesz. *Teorema di rappresentazione di Riesz*: enunciato e primi commenti. Unicità della misura data la σ-algebra. Costruzione di μ e di $\mathcal{M}$ a partire dal funzionale lineare positivo $\Lambda\colon C_c(X) \to \mathbb{C}$. Monotonia di μ e completezza dello spazio di misura. Subadditività numerabile di μ. Dimostrazione che $\mathcal{M}$ è una σ-algebra e che μ è una misura su $\mathcal{M}$. Dimostrazione che $\Lambda f = \int_X f\, d\mu$ per ogni $f \in C_c(X)$.

Regolarità interna ed esterna delle misure boreliane. Regolarità interna ed esterna di un insieme e di una misura. *Rafforzamenti del teorema di rappresentazione di Riesz nelle ipotesi che lo spazio sia σ-compatto, o che ogni aperto dello spazio sia σ-compatto.*

La misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^k$. Preliminari alla misura di Lebesgue in dimensione k: parallelepipedi, cubi, punti binari e cubi binari. *Teorema di esistenza della misura di Lebesgue e invarianza per traslazioni.* Confronto fra l'insieme dei boreliani, l'insieme dei misurabili secondo Lebesgue e l'insieme dei sottinsiemi di $\mathbb{R}^k$. *L'insieme non misurabile di Vitali. Comportamento degli insiemi misurabili e della misura di Lebesgue rispetto alle trasformazioni lineari.* Cenno al paradosso di Banach-Tarski.

Relazioni fra integrale di Riemann e di Lebesgue. Funzioni a gradino e definizione abbreviata dell'integrale di Riemann in $\mathbb{R}^k$. *Le funzioni integrabili secondo Riemann sono misurabili e integrabili secondo Lebesgue, con lo stesso integrale.* Oscillazione di una funzione a valori in uno spazio metrico. *Teorema di Vitali-Lebesgue* (le funzioni integrabili secondo Riemann sono quelle quasi ovunque continue).

Integrali dipendenti da un parametro. Integrali dipendenti da un parametro. Continuità di $x \mapsto \int_{[a,b]} f(t,x)\,dt$ quando f è continua nella coppia. Continuità di $x \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t,x)\,dt$ quando f, α, β sono continue. Derivabilità sotto il segno di integrale di $x \mapsto \int_{[a,b]} f(t,x)\,dt$ quando f è di classe C^1. Applicazione: *dimostrazione della formula dell'integrale della gaussiana:* $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

Per il teorema contrassegnato da un asterisco si possono consultare libri e appunti durante l'orale.

1. Approssimazione di funzioni misurabili positive con successioni o serie di funzioni semplici misurabili.
2. Teorema della convergenza monotona.
3. Lemma di Fatou.
4. Teorema della convergenza dominata.
5. Completezza dello spazio normato $L^1(\mu)$.
6. Dato un compatto K e un aperto V che lo contiene esiste un aperto contenente K e la cui chiusura è compatta e contenuta in V.
7. Lemma di Urysohn.
8. * Teorema di rappresentazione di Riesz.
9. Rafforzamenti del teorema di Riesz in ipotesi di σ-compattezza dello spazio, o di σ-compattezza di tutti i suoi aperti.
10. Costruzione della misura di Lebesgue n-dimensionale usando il teorema di rappresentazione di Riesz, e invarianza per traslazioni.
11. L'insieme non misurabile di Vitali.
12. Comportamento degli insiemi misurabili e della misura di Lebesgue rispetto alle trasformazioni lineari.
13. Le funzioni integrabili secondo Riemann sono misurabili e integrabili secondo Lebesgue, con lo stesso integrale.
14. Teorema di Vitali-Lebesgue.
15. Calcolo dell'integrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx$ usando gli integrali dipendenti da un parametro.