Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica.
Corso di Istituzioni di Analisi Superiore - I modulo
Programma d'esame (dettagliato), **a.a. 1997/98** ad uso degli studenti del corso.

1: Introduzione ad alcuni spazi di funzioni e completamenti.

Importanza degli spazi di funzioni nell'Analisi. Alcuni esempi di spazi di funzioni: $\mathcal{B}(T, I\!R)$ con $|\cdot|_\infty$, convergenza in $\mathcal{B}(T, I\!R)$, richiami sulla convergenza uniforme e puntuale, completezza di $\mathcal{B}(T, I\!R)$. Spazio $BC(T, I\!R)$, con T spazio topologico e completezza di $BC(T, I\!R)$, rispetto alla norma del "sup". Esempio: $C(K, I\!R)$, con K compatto. Completamento $\hat{X}$ di uno spazio metrico. Completamento secondo Cantor (passi principali della dimostrazione). Teorema di immersione di uno spazio metrico X in $\mathcal{B}(X, I\!R)$ e completamento mediante immersione. Completamento degli spazi normati e completamento degli spazi con prodotto scalare. Spazi di Banach e spazi di Hilbert. Teorema di estensione delle funzioni uniformemente continue. Spazio vettoriale $C(I)$, con I intervallo compatto e norme $|\cdot|_p$ su $C(I)$, per $p \geq 1$. Diseguaglianze di Young, Hölder, Minkowski per $|\cdot|_p$. Convergenza rispetto alla norma $|\cdot|_p$ e ordine per finezza delle norme p-me. Non completezza di $C(I)$ rispetto a $|\cdot|_p$, per $1 \leq p < \infty$. Cenno agli spazi $L^p(I)$ come completamenti di $C(I)$ rispetto a $|\cdot|_p$.

2: Introduzione alla misura e all'integrale di Lebesgue.

Richiami sull'integrale di Riemann per funzioni di una variabile reale a valori reali. "Difetti" dell'integrale di Riemann per quanto riguarda i teoremi di "passaggio al limite sotto integrale". Introduzione all'integrale di Lebesgue. Proprietà tipiche di una "buona" definizione di integrale (normalizzazione, additività per funzioni e per intervalli non sovrapposti, invarianza per traslazioni, convergenza monotona). Integrazione delle funzioni caratteristiche, utilità di introdurre un concetto di misura. Definizioni di σ-algebra, spazio misurabile, misura (numerabilmente additiva) a valori in $[0, +\infty]$, insiemi misurabili, spazio dotato di misura. Operazioni in $[0, +\infty]$. Proprietà di una misura. Teoremi di passaggio al limite per inclusioni di insiemi. Funzioni misurabili. Caso delle funzioni misurabili a valori in $I\!R$, $I\!R^2, \mathbb{C}$. Proprietà di Lindelöf e alcuni teoremi sulle funzioni misurabili. Richiami su $\liminf$ e $\limsup$. Limiti inferiori, superiori e limiti di successioni di funzioni misurabili. Funzioni caratteristiche, funzioni semplici, approssimabilità delle funzioni misurabili a valori in $[0, +\infty]$, mediante funzioni semplici (convergenza puntuale della successione ϕ_n e caso in cui è anche uniforme). Integrale di una funzione misurabile $f \geq 0$, su un insieme misurabile E, rispetto ad una misura μ. Definizione di $\int_E f d\mu$ partendo dalle funzioni semplici minoranti. Prime proprietà dell'integrale. Teorema di convergenza monotona (Beppo - Levi) ed applicazione alle serie di funzioni non negative. Lemma di Fatou. Misura $d\hat{\mu} = f d\mu$. Integrale delle funzioni a valori in $I\!R$ e in $\mathbb{C}$. Condizione di integrabilità: $\int |f| < +\infty$ e altre condizioni di integrabilità usando parte positiva e parte negativa. Linearità dell'integrale. Teorema di Lebesgue della convergenza dominata e applicazione al caso delle serie. Insiemi di misura nulla. Cosa significa "quasi ovunque". Convergenza q.o. e relazione $f = g$ q.o., con riscrittura dei teoremi nella forma in cui le proprietà possono essere considerate "q.o.". Completezza di una misura e teorema di completamento. Misurabilità di g per $f = g$ q.o. nel caso di una misura completa. Definizione di misura esterna λ. Caso particolare della misura esterna di Lebesgue in $I\!R$. Misurabilità secondo Caratheodory a partire da una misura esterna. Proprietà degli insiemi misurabili secondo Caratheodory. Completezza della misura μ dedotta da λ. Insiemi di Borel e misurabili secondo Lebesgue in $I\!R$. Esempio di Vitali di un insieme non misurabile secondo Lebesgue. Proprietà della misura di Lebesgue in $I\!R$. Alcune proprietà degli insiemi non misurabili. Insiemi nella forma $\mathcal{G}_\delta$ e $\mathcal{F}_\sigma$. Esempi. Approssimazione degli insiemi misurabili usando aperti, chiusi, insiemi $\mathcal{G}_\delta$ e $\mathcal{F}_\sigma$. Insieme "triadico" di Cantor e insiemi di Cantor generalizzati (con fattore α).

3: Categoria secondo Baire e applicazioni.

Definizione di categoria secondo Baire: insiemi di prima categoria (magri) e di seconda categoria. Spazi metrici completi, lemma di Cantor su una successione decrescente di insiemi con diametro tendente a zero. Teorema di Baire sugli spazi metrici completi. Esempi in $I\!R$ di insiemi $\mathcal{G}_\delta$ e non $\mathcal{F}_\sigma$. Insieme dei punti di continuità o discontinuità di una funzione. Esempio di funzione continua solo sugli irrazionali e impossibilità di avere una funzione continua solo sui razionali. Esempio di una funzione continua e mai derivabile: esempio di Van der Waerden ed esempio usando il teorema di Baire. Confronto fra categoria e misura. Teorema di uniforme limitatezza per funzioni $X \to I\!R$, con X completo (anche enunciato in forma di alternativa). Teorema di Banach - Steinhaus per operatori lineari e continui $X \to Y$, con X di Banach. Applicazione al limite puntuale di operatori. Teorema di convergenza assoluta per le serie in uno spazio di Banach e caratterizzazione della completezza mediante le serie. Esempio: M-test di Weierstrass in $\mathcal{B}(T, I\!R)$ e in $BC(T, I\!R)$. Teorema della mappa aperta, con alcune applicazioni (caso dell'isomorfismo). Teorema del grafico chiuso con esempi ed applicazioni. Norma del grafico. Teorema di Hellinger - Toeplitz per operatori simmetrici.

4: Spazi L^p.

Integrabilità delle funzioni misurabili e limitate e caratterizzazione in tale caso dell'integrale di Lebesgue per insiemi di misura finita. Integrabilità secondo Lebesgue delle funzioni integrabili secondo Riemann. Richiami sulla misura di Peano - Jordan in $I\!R$. Caratterizzazione delle funzioni integrabili secondo Riemann con la misura nulla (secondo Lebesgue) dell'insieme dei punti di discontinuità (dimostrazione di una delle due implicazioni, usando la definizione di oscillazione). Teorema di Lusin (senza dimostrazione). Spazi $L^p(\mu)$ e casi particolari: spazi $L^p(I)$, $l^p(T)$, l^p, per $1 \leq p < +\infty$. Identificazione $f = 0$ in L^p, se $f = 0$ q.o. Diseguaglianze di Hölder e Minkowski. Diseguaglianza di Jensen e alcune sue conseguenze (anche nel caso discreto). Teorema di completezza degli spazi L^p (teorema di Riesz -Fisher). Confronto fra le convergenze uniforme, quasi ovunque, in L^p, cenno alla convergenza in misura. Teorema di Egorov (senza dimostrazione). Densità di $C(I)$ in $L^p(I)$, rispetto a $|\cdot|_p$ (cenni) e $L^p(I)$ come completamento di $C(I)$ rispetto alla norma p-ma. Definizione di "ess sup". Spazi L^∞ e l^∞ e loro completezza. Cenno agli spazi di Sobolev su I, intervallo compatto di $I\!R$.

5: Misura e dimensione di Hausdorff

Costruzione di Caratheodory di una misura a partire di una misura esterna. Caso degli spazi metrici. Misura esterna metrica. Misurabilità dei boreliani. δ-misura esterna s-dimensionale di Hausdorff e misura esterna di Hausdorff s-dimensionale $\mathcal{H}^s$. Proprietà di $\mathcal{H}^s$. Confronto con la misura di Lebesgue n-dimensionale (cenni). Dimensione di Hausdorff $\dim_H$ e sue proprietà: monotonia, dimensione degli aperti e delle varietà, invarianza per applicazioni bi-lipschitziane (con caso particolare delle isometrie e delle similitudini), stabilità numerabile. { Cenno ad altri tipi di dimensione ("box counting", dimensione topologica induttiva e definizione di insieme frattale secondo Mandelbrot) }. Esempi di calcolo della dimensione di Hausdorff per alcuni s-insiemi autosimili. Famiglie di contrazioni $(f_1, \ldots, f_m)$ (ovvero IFS) e loro insiemi invarianti. Spazio $\mathcal{K}$ dei sottoinsiemi compatti e non vuoti di un chiuso $D \subset I\!R^n$. Distanza di Hausdrorff in $\mathcal{K}$. Teorema di selezione di Blanschke e completezza di $\mathcal{K}$. Teorema di esistenza, unicità ed approssimabilità di un compatto non vuoto ed invariante F per un IFS. { Caratterizzazione di F nel caso in cui $f_i(E) \subset E$. Condizione dell'insieme aperto e calcolo della dimensione dell'insieme invariante nel caso delle similitudini contrattive (senza dimostrazione). Applicazioni alla compressione di immagini: teorema del "collage" ed approssimazione di un compatto non vuoto mediante un compatto invariante di un IFS. }

NOTA: la parte indicata in parentesi $\{\ldots\}$ pur essendo stata svolta regolarmente a lezione non costituisce materia di esame.

Teoremi per i quali è richiesta la dimostrazione all'esame *

Teorema di prolungamento delle funzioni uniformemente continue. [1]

* fra parentesi, si indica il testo da cui si è presa la dimostrazione fatta a lezione oppure (ad esempio nel caso di indicazione multipla) si suggeriscono alcuni posti dove si può trovare una dimostrazione. In ogni caso, un qualunque testo dove si trovi una dimostrazione corretta dei teoremi e degli argomenti svolti (ad esempio: appunti del corso, libri di Analisi Funzionale o di Teoria della Misura, ecc.) va bene. Nel caso in cui ci si prepari sugli appunti del corso (cosa che si può fare certamente; anzi gli appunti del corso rappresentano il miglior riferimento relativamente agli argomenti svolti a lezione), non garantisco dell'assenza di eventuali errori od imprecisioni, se prima non ho controllato personalmente gli appunti stessi. Pertanto in caso di "dubbi" su qualche punto poco chiaro o sospetto, si prega di consultarmi durante l'orario di ricevimento.

Assiomi di una misura e teoremi di passaggio al limite per successioni crescenti o decrescenti di insiemi. [13]

Approssimabilità di una funzione misurabile e positiva mediante funzioni semplici. [13]

Teorema di Beppo - Levi (sulla convergenza monotona) e sua applicazione alle serie di funzioni positive. [13]

Lemma di Fatou. [13]

Teorema di Lebesgue della convergenza dominata e sua applicazione alle serie di funzioni. [13]

Assiomi di misura esterna e ottenimento di una misura a partire da una misura esterna, mediante la definizione di Caratheodory. [12]

Esempio di Vitali di un insieme non misurabile secondo Lebesgue in $I\!R$. [12]

Verifica dell'integrabilità secondo Lebesgue per le funzioni limitate, integrabili secondo Riemann su un intervallo compatto. [12]

Diseguaglianza di Jensen. [12], [13]

Diseguaglianze di Hölder e Minkowski per $|\cdot|_p$. [1], [12], [13]

Completezza degli spazi L^p (teorema di Riesz - Fisher). [3], [12], [13]

Teorema di Baire (sulla categoria negli spazi metrici). [3], [12], [13]

Teorema di uniforme limitatezza per funzioni $X \to I\!R$. [12]

Teorema di Banach - Steinhaus per applicazioni lineari e continue $X \to Y$. [3], [12], [13]

Continuità del limite di una successione di operatori lineari e continui. [3], [12], [13]

Teorema della mappa aperta. [3], [12], [13]

Teorema del grafico chiuso. [3], [11], [12], [13]

Teorema di Hellinger - Toeplitz per operatori simmetrici. [11]

Lemma di Caratheodory e misurabilità dei boreliani in uno spazio metrico con misura esterna metrica. [5]

Definizione di dimensione di Hausdorff e sue proprietà (una proprietà scelta dallo studente). [5], [6]

Esistenza ed unicità di insieme non vuoto compatto ed invariante per una famiglia di contrazioni (IFS). [5], [6]

ALCUNI TESTI CONSULTATI PER LA PREPARAZIONE DELLE LEZIONI**

[1] J.-P. Aubin: Applied Abstract Analysis

[2] R.G. Bartle: The Elements of Integration and Lebesgue Measure

[3] H. Brezis: Analisi Funzionale - Teoria e Applicazioni (vedere eventualmente l'edizione in lingua francese)

[4] G. De Marco: Analisi Matematica II

[5] K. Falconer: The Geometry of Fractal Sets

[6] K. Falconer: Fractal Geometry

[7] B.R. Gelbaum, J.M.H. Olmsted: Controesempi in Analisi Matematica

[8] B. Mandelbrot: The Fractal Geometry of Nature

[9] J.C. Oxtoby: Measure and Cathegory

[10] I.N. Pesin: Classical and Modern Integration Theories

[11] M. Reed, B. Simon: Methods of Modern Mathematical Physics

[12] H.L. Royden: Real Analysis

[13] W. Rudin: Real and Complex Analysis (vedere eventualmente l'edizione in lingua italiana).

** tutti i testi consigliati sono reperibili presso la biblioteca del CISB