Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo Programma

Prof. Gianluca Gorni

Testi di riferimento: Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill (traduzione italiana presso Boringhieri). Giuseppe De Marco, *Analisi Due/2*, Decibel-Zanichelli. Appunti del corso.

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine, con l'indicazione di quelli per i quali è consentito consultare gli appunti.

Regolamento d'esame: Gli scritti possono essere ripetuti senza limitazioni, ma ogni scritto consegnato annulla i precedenti. Chi ha superato lo scritto a un appello può dare l'orale all'appello stesso o in qualsiasi successivo.

1. Misura e integrazione astratte.

Rudin, cap. 1

σ-algebre, spazi misurabili e funzioni misurabili. Pro e contro dell'integrale secondo Riemann e bisogno di una teoria più avanzata. Assiomi degli spazi misurabili e delle funzioni misurabili e confronto con gli assiomi degli spazi topologici. Prime conseguenze. Misurabilità della coppia di due funzioni reali misurabili. Ogni aperto di $\mathbb{R}^2$ è unione numerabile di rettangoli aperti. Misurabilità di una funzione complessa in termini della misurabilità della parte reale e di quella immaginaria. Somma e prodotto di funzioni misurabili. Funzione caratteristica di un insieme misurabile. "Decomposizione polare" di una funzione misurabile complessa. La σ-algebra generata da una famiglia di sottinsiemi di un insieme. La σ-algebra dei boreliani di uno spazio topologico. Esempi di boreliani di $\mathbb{R}$. Cenno alla "costruzione" della famiglia dei boreliani. Traduzione della misurabilità di una funzione in termini di contrimmagini di boreliani. Caratterizzazione della misurabilità di una funzione reale in termini della contrimmagine delle semirette. Composizione di una funzione misurabile con una boreliana. Data una successione di funzioni misurabili a valori reali estesi, gli estremi superiore, inferiore, il massimo e il minimo limite della successione sono funzioni misurabili. Definizione di funzione semplice. *Ogni funzione misurabile a valori in* $[0, +\infty]$ *è limite puntuale di una successione crescente di funzioni semplici misurabili.*

Misure su spazi misurabili. Definizione di misura positiva su una σ-algebra e di spazio di misura. Prime conseguenze: $\mu(\emptyset) = 0$, additività finita, monotonia, passaggio al limite sulle successioni crescenti di insiemi misurabili. Passaggio al limite sulle successioni decrescenti di insiemi misurabili. L'aritmetica nei numeri reali positivi estesi con $+\infty$.

Integrale di funzioni misurabili positive. Definizione di integrale per funzioni semplici positive e prime proprietà. Definizione di integrale per funzioni misurabili positive e prime proprietà. *Teorema della convergenza monotona.* Teorema dell'integrazione per serie (per funzioni misurabili positive). Significato dell'integrale nel caso della misura del conteggio e della misura concentrata in un punto. Applicazione del teorema dell'integrazione per serie alla dimostrazione che $\sum_i \sum_j a_{ij} = \sum_j \sum_i a_{ij}$ se $a_{ij} \geq 0$. *Lemma di Fatou.* Misure definite dall'integrazione di una funzione misurabile positiva (densità).

Integrale di funzioni reali o complesse e lo spazio normato $L^1(\mu)$. Definizione di integrale per funzioni misurabili reali con segno qualunque e per funzioni misurabili complesse: l'insieme $L^1(\mu)$. Teorema di linearità dell'integrale su $L^1(\mu)$. La disuguaglianza $|\int f| \leq \int |f|$. *Il teorema di convergenza dominata.* Insiemi di misura nulla e proprietà vere quasi ovunque. L'uguaglianza quasi ovunque rispetto a una misura e la relazione di equivalenza sulle funzioni misurabili che ne deriva. Teorema di completamento di uno spazio di misura. Misurabilità e integrale per funzioni definite quasi ovunque. Certe proprietà dell'integrale di una funzione misurabile implicano proprietà vere quasi ovunque per la funzione stessa. Il quoziente dello spazio vettoriale seminormato $L^1(\mu)$ rispetto alla relazione di uguaglianza quasi ovunque. Convergenza quasi ovunque di una successione di funzioni. Successioni a variazione limitata in uno spazio metrico. Se $\sum \int |f_n| < +\infty$ allora la serie $\sum f_n$ converge quasi ovunque e in $L^1(\mu)$. Lo spazio normato $L^1(\mu)$ è completo. La convergenza in $L^1(\mu)$ non implica la convergenza puntuale quasi ovunque. Un teorema sulle medie integrali di funzioni complesse. Sotto certe condizioni $f < g$ implica $\int f < \int g$. Esercizi sulla misura e sull'integrazione astratta.

2. Misure boreliane positive

Rudin cap. 2. De Marco VII.5, VI.1-2. Appunti del corso

Introduzione e preliminari topologici. Introduzione allo studio delle misure positive su spazi topologici. Preliminari topologici: spazi di Hausdorff, spazi localmente compatti, prime proprietà degli insiemi compatti. Separazione di un compatto da un punto esterno. *Dato un compatto K e un aperto V che lo contiene esiste un aperto contenente K e la cui chiusura è compatta e contenuta in V.* Funzioni reali estese semicontinue: definizione e prime proprietà. Lo spazio vettoriale $C_c(X)$ delle funzioni complesse continue a supporto compatto. La notazione $K \prec f \prec V$. *Il lemma di Urysohn.* Teorema della partizione dell'unità.

Teorema di rappresentazione di Riesz. *Il teorema di rappresentazione di Riesz* in spazi topologici di Hausdorff localmente compatti: enunciato e primi commenti. Unicità della misura data la σ-algebra. Costruzione di μ e di $\mathcal{M}$ a partire dal funzionale lineare positivo $\Lambda: C_c(X) \to \mathbb{C}$. Monotonia di μ e completezza dello spazio di misura. Subadditività numerabile di μ. Dimostrazione che $\mathcal{M}$ è una σ-algebra e che μ è una misura su $\mathcal{M}$. Dimostrazione che $\Lambda f = \int_X f \, d\mu$ per ogni $f \in C_c(X)$.

Regolarità interna ed esterna delle misure boreliane. Regolarità delle misure boreliane. *Rafforzamenti del teorema di Riesz* in ipotesi di σ-compattezza dello spazio, o di σ-compattezza di tutti i suoi aperti.

La misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$. La misura di Lebesgue unidimensionale dedotta dall'integrale di Riemann usando il teorema di Riesz. Misura di intervalli aperti, di singoli punti, di semirette, di tutto $\mathbb{R}$, di aperti, di insiemi numerabili. La misura (esterna) di Lebesgue definita in termini di ricoprimenti con famiglie numerabili di intervalli aperti. Preliminari al caso di $\mathbb{R}^k$: celle e cubi k-dimensionali. La misura di Lebesgue in dimensione qualsiasi: *costruzione usando il teorema di rappresentazione di Riesz.* La misura di Lebesgue è invariante per traslazioni, e *ogni misura boreliana su $\mathbb{R}^k$ che sia invariante per traslazioni e finita sui compatti è un multiplo della misura di Lebesgue.* Un insieme non misurabile secondo Lebesgue: *l'insieme di Vitali. L'insieme di Cantor.* Insiemi misurabili secondo Lebesgue ma non boreliani. Varianti dell'insieme di Cantor. Cenni all'esistenza di "misure" finitamente additive e invarianti per isometrie, che estendono la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{R}^2$ a tutti i sottinsiemi limitati. Cenno al paradosso di Banach-Tarski in $\mathbb{R}^3$.

Relazioni fra integrale di Riemann e di Lebesgue. Definizione di integrale secondo Riemann in $\mathbb{R}^n$. Le funzioni integrabili secondo Riemann sono integrabili anche secondo Lebesgue, con lo stesso integrale. La funzione di Dirichlet. Oscillazione di una funzione fra due spazi metrici in un punto e sua relazione con la continuità. *Teorema di Vitali-Lebesgue*: caratterizzazione dell'integrabilità secondo Riemann in termini di continuità quasi ovunque. Confronto fra integrabilità alla Riemann e alla Lebesgue.

Integrali di Lebesgue su $\mathbb{R}$ dipendenti da un parametro. Integrali dipendenti da un parametro reale: condizioni sufficienti per la continuità. Esempi. Derivabilità sotto il segno di integrale: condizioni sufficienti. Esempi. Se $f\colon]a,b[\times]c,d[\to\mathbb{R}$ ha derivate parziali limitate allora è lipschitziana, e quindi continua. Se $f(t,x)$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$ allora la funzione $F(x,y) := \int_0^y f(t,x)dt$ è pure di classe C^∞, con derivate parziali ovvie. Applicazione allo studio di integrali dipendenti da parametri. *L'integrale della gaussiana $\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}$ dimostrato con gli integrali dipendenti da un parametro.* Definizione della funzione Gamma di Eulero-Legendre. Proprietà della funzione Gamma: insieme di definizione (nei reali e nei complessi), continuità, derivabilità, relazione fondamentale $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, valore di Γ su $\mathbb{N}$ e su $\frac{1}{2}+\mathbb{N}$, estensione di Γ all'insieme $\mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N})$. La funzione Beta: definizione, formule equivalenti, relazione con la funzione Gamma. Esercizi sugli integrali dipendenti da parametro.

3. Misure prodotto

Rudin cap. 7. De Marco VII.6, VIII.4

Prodotto cartesiano di spazi misurabili. Definizione di σ-algebra prodotto $\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}$ di due σ-algebre $\mathcal{S},\mathcal{T}$. Rettangoli misurabili, insiemi elementari e classi monotone. Le sezioni orizzontali e verticali di insiemi di $\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}$ sono misurabili. *Caratterizzazione della σ-algebra prodotto come la minima classe monotona contenente gli insiemi elementari.* Sezioni (o funzioni parziali) di una funzione di due variabili, e loro misurabilità.

Misure prodotto e teorema di Fubini-Tonelli. Misure iterate sullo spazio prodotto: esempio in cui il risultato dipende dall'ordine di integrazione. La misura prodotto: si cerca una misura sulla σ-algebra prodotto che coincida con "base per altezza" nel caso dei rettangoli misurabili. Gli integrali delle misure delle sezioni sono candidati a essere la misura prodotto. Esempio in cui le misure delle sezioni non formano una funzione misurabile. *Teorema della misura prodotto nel caso di misure σ-finite.* Esempio di Sierpiński di un sottinsieme di $[0,1]\times[0,1]$ che ha tutte le sezioni misurabili secondo Lebesgue ma che non appartiene alla σ-algebra prodotto. *Il teorema di Fubini-Tonelli.* Gli integrali iterati della funzione $(x,y)\mapsto(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$ su $[0,1]^2$ sono diversi. Commenti su questo e altri "paradossi" che si hanno quando si cerca di integrare una funzione che non è in L^1.

Completamento degli spazi prodotto e relazioni fra la misura di Lebesgue in dimensione $r+s$ e il prodotto delle misure di Lebesgue r e s-dimensionali. Lo spazio di misura bidimensionale di Lebesgue $(\mathbb{R}^2,\mathcal{M}_2,m_2)$ non coincide con lo spazio prodotto $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathcal{M}_1\otimes\mathcal{M}_1,m_1\otimes m_1)$ di due spazi unidimensionali, in quanto ci sono insiemi misurabili per la misura bidimensionale le cui sezioni non sono tutte misurabili. Relazioni fra gli spazi di misura $(\mathbb{R}^{r+s},\mathcal{M}_{r+s},m_{r+s})$, $(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^s,\mathcal{M}_r\otimes\mathcal{M}_s,m_r\otimes m_s)$, $(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^s,\mathcal{B}_r\otimes\mathcal{B}_s,m_r\otimes m_s)$. Un insieme o una funzione misurabili rispetto alla σ-algebra completamento di uno spazio prodotto ha le sezioni quasi ovunque misurabili e coincide quasi ovunque con un insieme o una funzione misurabile rispetto alla σ-algebra non completata. Versione del teorema di Fubini-Tonelli per funzioni misurabili rispetto al completamento della misura prodotto.

Calcolo di integrali di Lebesgue in più dimensioni. Enunciato del teorema di cambio di variabili nell'integrale di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$. Dimostrazione che $x \mapsto x^{-1} \operatorname{sen} x$ non è in $L^1([0,+\infty[$ ma che $\int_0^A x^{-1} \operatorname{sen} x \, dx \to \pi/2$ per $A \to +\infty$. Cambio di variabili: caso delle coordinate polari nel piano, con interpretazione geometrica della formula. *Dimostrazione che $\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}$ usando il teorema di Fubini-Tonelli e le coordinate polari.* Variabili aleatorie gaussiane in dimensione n: calcolo del coefficiente di normalizzazione, calcolo del valor medio e della matrice di varianza-covarianza. Dimostrazione della formula che lega le funzioni Beta e Gamma. Integrali su sottinsiemi di uno spazio prodotto che non sono rettangoli. Calcolo del volume della palla euclidea unitaria in dimensione n.

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

Per il teorema contrassegnato da un asterisco si possono consultare libri e appunti.

1. Ogni funzione misurabile a valori in $[0,+\infty]$ è limite puntuale di una successione crescente di funzioni semplici misurabili.
2. Teorema della convergenza monotona.
3. Lemma di Fatou.
4. Teorema della convergenza dominata.
5. Dato un compatto K e un aperto V che lo contiene esiste un aperto contenente K e la cui chiusura è compatta e contenuta in V.
6. Lemma di Urysohn.

*7. Teorema di rappresentazione di Riesz.

8. Rafforzamenti del teorema di Riesz in ipotesi di σ-compattezza dello spazio, o di σ-compattezza di tutti i suoi aperti.
9. Costruzione della misura di Lebesgue n-dimensionale usando il teorema di rappresentazione di Riesz.
10. Ogni misura boreliana su $\mathbb{R}^k$ che sia invariante per traslazioni e finita sui compatti è un multiplo della misura di Lebesgue
11. L'insieme non misurabile di Vitali e l'insieme di Cantor.
12. Teorema di Vitali-Lebesgue.
13. Calcolo dell'integrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$ in due maniere.
14. Caratterizzazione della sigma-algebra prodotto in termini di classi monotone e insiemi elementari.
15. Costruzione della misura prodotto di due misure σ-finite.
16. Teorema di Fubini-Tonelli.