Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Programma Dettagliato

Prof. Gianluca Gorni

Testi di riferimento: Walter Rudin, Analisi Reale e Complessa, Boringhieri. Giuseppe De Marco, *Analisi Due* (prima edizione), Decibel-Zanichelli, capitolo IX. Materiale didattico attinente al corso è anche disponibile presso

`http://www.dimi.uniud.it/gorni/Istituzioni`

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

Misura e integrazione astratta

σ-algebre di insiemi misurabili, boreliani e funzioni misurabili. Motivazione storica per la teoria dell'integrazione secondo Lebesgue. Le σ-algebre sono stabili per complementi, unioni e intersezioni numerabili, differenze. Funzioni misurabili da uno spazio misurabile a uno spazio topologico. Composizione di una funzione misurabile con una continua è misurabile. Lemma topologico: ogni aperto di $\mathbb{R}^2$ è unione di una famiglia numerabile di rettangoli aperti. Una funzione a valori in $\mathbb{R}^2$ è misurabile se e solo se lo sono le componenti. Somma e prodotto di funzioni misurabili reali o complesse è misurabile. La funzione caratteristica di un insieme e la sua misurabilità. Costruzione delle σ-algebre su insiemi di zero, uno, due e tre elementi. L'intersezione di una famiglia di σ-algebre è ancora una σ-algebra. La σ-algebra generata da una famiglia di sottinsiemi di un insieme. Cenno alla "costruzione" della σ-algebra generata. La famiglia dei boreliani di uno spazio topologico. Le famiglie F_σ e G_δ di Hausdorff. Esempi di boreliani di $\mathbb{R}$. Funzioni boreliane fra spazi topologici. Famiglie diverse di insiemi che generano la stessa σ-algebra. Esempi: i boreliani di $\mathbb{R}$ sono generati dagli intervalli aperti, o dalle semirette di estremo razionale. I boreliani della retta estesa $[-\infty, +\infty]$. Ridefinizione di misurabilità di una funzione in termini di contrimmagini di boreliani.

Convergenze per funzioni misurabili e semplici. Composizione di una funzione misurabile con una boreliana è misurabile. La funzione parte intera $\lfloor x \rfloor$ è boreliana. Massimo e minimo limite di una successione reale estesa. Limite superiore e limite inferiore di una successione reale estesa e sua coincidenza con massimo e minimo limite (cenni). Teorema: data una successione di funzioni misurabili a valori reali estesi, anche gli inviluppi superiore e inferiore, e il massimo e il minimo limite della successione sono misurabili. Parte positiva e parte negativa di una funzione a valori reali estesi. Esercizi sulle funzioni misurabili a valori reali estesi. Funzioni semplici misurabili e loro espressione come combinazione lineare di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili. Discretizzazioni dei numeri reali usando la parte intera, e loro proprietà. Teorema: data una funzione misurabile a valori positivi, esiste una successione di funzioni semplici, misurabili e positive che tende puntualmente crescendo alla funzione data. Variante: ogni funzione misurabile positiva è combinazione lineare numerabile di funzioni caratteristiche misurabili.

Misure positive e integrale di funzioni misurabili positive. Definizione di misura positiva e di spazio di misura. Primi esempi di misure: misura nulla, misura unitaria concentrata in un punto, misura del conteggio. Prime proprietà delle misure: il vuoto ha misura nulla, additività finita, monotonia. Passaggio al limite della misura su successioni crescenti o decrescenti di insiemi. L'aritmetica nei reali estesi positivi, in particolare la convenzione $(+\infty) \cdot 0 = 0$. Definizione di integrale per funzioni semplici misurabili positive e per funzioni misurabili positive. Proprietà dell'integrale di funzioni semplici misurabili positive: se s è costante e vale c su E allora $\int_E s\,d\mu = c\mu(E)$, la funzione $E \mapsto \int_E s\,d\mu$ è una misura, additività, $\int_E s\,d\mu = \int_X s\chi_E\,d\mu$, monotonia rispetto alla funzione. Prime proprietà dell'integrale di funzioni misurabili positive. *Condizione necessaria e sufficiente perché una funzione misurabile positiva abbia integrale nullo.*

Passaggio al limite per funzioni positive. *Il teorema di Lebesgue (o di Beppo-Levi) sulla convergenza monotona.* Esempi. L'additività dell'integrale per funzioni misurabili positive. Il teorema di integrazione per serie positive. L'integrale nel caso di una misura concentrata in un punto. L'integrale rispetto alla misura del conteggio è la somma dei valori. La teoria delle serie numeriche positive è un caso particolare della teoria dell'integrale astratto. Teoremi sulle serie dedotti dai teoremi sull'integrale. *Il lemma di Fatou.* Esempio di disuguaglianza stretta. Proprietà della misura definita come $\varphi(E) := \int_E f\,d\mu$.

Funzioni a segno qualsiasi e lo spazio L^1. Integrale di funzioni a segno qualsiasi: funzioni reali semi-integrabili e funzioni sommabili. L'insieme $L^1(\mu)$. Additività dell'integrale per funzioni sommabili reali. Linearità dell'integrale su $L^1(\mu)$. La disuguaglianza $|\int f| \leq \int |f|$, e per quali f vale l'uguaglianza. *Il teorema della convergenza dominata.* Un sottinsieme di un insieme trascurabile non è detto che sia misurabile. Il completamento di uno spazio di misura e la sua costruzione. La relazione di uguaglianza quasi ovunque fra funzioni misurabili è una relazione di equivalenza che si mantiene per convergenza puntuale ed è trasparente per l'integrale. Funzioni misurabili definite su un sottinsieme misurabile e loro estensioni. Proprietà definite quasi ovunque. Funzioni misurabili definite quasi ovunque, la loro integrazione e il loro quoziente rispetto all'uguaglianza quasi ovunque. Lo spazio normato L^1 formato dalle classi di equivalenza di funzioni definite quasi ovunque. Convergenza quasi ovunque. *Il teorema dell'integrazione per serie in L^1.* Successioni a variazione limitata in uno spazio metrico. Riformulazione della completezza di uno spazio metrico in termini di convergenza di tutte le successioni a variazione limitata. *Lo spazio normato L^1 è completo.* Confronto fra le convergenze uniforme, puntuale quasi ovunque e in L^1. I teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale con parametro intero e con parametro reale. Esempio: *studio della funzione Gamma di Eulero-Legendre.* Esercizi su misura e integrazione astratta.

La misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$

Costruzione della misura di Lebesgue. Introduzione alla misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$. Rettangoli e insiemi elementari (unioni finite di rettangoli), famiglie di rettangoli a scacchiera. Il volume dei rettangoli e degli insiemi elementari. Definizione di misura esterna di Lebesgue. *La misura esterna di Lebesgue è nulla sul vuoto, monotona e numerabilmente subadditiva.* Nella definizione di misura esterna ci si può ridurre ai ricoprimenti con rettangoli limitati, o con rettangoli aperti. La misura esterna degli insiemi elementari coincide col volume. Definizione di insieme misurabile secondo Lebesgue. Gli insiemi trascurabili sono misurabili. Gli insiemi elementari sono misurabili. *Teorema di Carathéodory: gli insiemi misurabili formano una σ-algebra, sulla quale la misura esterna è numerabilmente additiva.* Gli aperti e i boreliani sono misurabili. *Unicità della misura di Lebesgue. L'insieme non misurabile di Vitali: definizione, i suoi traslati razionali ricoprono disgiuntamente un intervallo, non misurabilità.* Cenno al paradosso di Banach-Tarski.

Il teorema di Vitali-Lebesgue. Oscillazione di una funzione in un punto. Caratterizzazione della continuità in un punto in termini di oscillazione. Definizione di funzione integrabile secondo Riemann. *Il teorema di Vitali-Lebesgue* che caratterizza le funzioni integrabili secondo Riemann in termini della misura dell'insieme dei punti di discontinuità.

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

1. Una funzione a valori in $\mathbb{R}^2$ è misurabile se e solo se lo sono le componenti.
2. Condizione necessaria e sufficiente perché una funzione misurabile positiva abbia integrale nullo.
3. Il teorema della convergenza monotona.
4. Il lemma di Fatou, con esempio di disuguaglianza stretta.
5. Il teorema della convergenza dominata.
6. Il teorema di integrazione per serie $\int \sum f_n = \sum \int f_n$ nelle ipotesi che $f_n \geq 0$, e in quelle che $\sum \|f_n\|_1 < +\infty$.
7. Lo spazio metrico L^1 è completo.
8. La funzione Gamma e la sua continuità.
9. La misura esterna di Lebesgue è nulla sull'insieme vuoto, monotona e numerabilmente subadditiva.
10. Il teorema di Carathéodory: gli insieme misurabili secondo Lebesgue formano una σ-algebra.
11. Unicità della misura di Lebesgue.
12. L'insieme non misurabile di Vitali: definizione, i suoi traslati razionali ricoprono disgiuntamente un intervallo, non misurabilità.
13. Il teorema di Vitali-Lebesgue.