Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Programma Dettagliato

Prof. Gianluca Gorni

Testi di riferimento: Walter Rudin, Analisi Reale e Complessa, Boringhieri. Giuseppe De Marco, *Analisi Due* (prima edizione), Decibel-Zanichelli, capitolo IX. Materiale didattico attinente al corso è anche disponibile presso

`http://www.dimi.uniud.it/gorni/Istituzioni`

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

Misura e integrazione astratta

σ-algebre di insiemi misurabili. Motivazione storica per la teoria dell'integrazione secondo Lebesgue. Assiomi paralleli della topologia e della σ-algebra. Prime proprietà delle σ-algebre: l'insieme vuoto c'è sempre, sono stabili per unioni finite e per intersezioni finite, sono stabili per intersezioni numerabili. Definizione di funzione continua e di funzione misurabile. La composizione di una funzione misurabile con una continua è misurabile. Lemma topologico: ogni aperto di $\mathbb{R}^2$ è unione di una famiglia numerabile di rettangoli aperti. *Se $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ sono misurabili e $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to Y$ è continua, allora $h(x) := \Phi(f(x), g(x))$ è misurabile.* Una funzione a valori in $\mathbb{R}^n$ è misurabile se e solo se lo sono tutte le componenti. Una funzione a valori complessi è misurabile se e solo se lo sono la parte reale e la parte immaginaria. Somma e prodotto di funzioni misurabili reali o complesse sono misurabili. La funzione caratteristica di un insieme. Esistenza di σ-algebre: le σ-algebre banali di un insieme qualsiasi e quelle degli insiemi con 0, 1, 2 e 3 elementi. Cenno alle σ-algebre degli insiemi finiti. L'intersezione di una famiglia di σ-algebre su un insieme X è ancora una σ-algebra su X. La σ-algebra generata da una famiglia di sottinsiemi di X. Cenno a come si "costruisce" la σ-algebra generata da una famiglia di sottinsiemi tramite complementi e unioni numerabili. La topologia generata da una famiglia di sottinsiemi. La σ-algebra dei boreliani di uno spazio topologico. La σ-algebra dei boreliani è generata anche dai chiusi. Gli intervalli semiaperti di $\mathbb{R}$ sono boreliani. Le famiglie G_δ e F_σ di Hausdorff. I boreliani di $\mathbb{R}$ sono generati dalla famiglia (numerabile) degli intervalli aperti di estremi razionali. Non tutti i sottinsiemi di $\mathbb{R}$ sono boreliani (senza dimostrazione). I boreliani di $\mathbb{R}$ sono generati dalla famiglia delle semirette (destre o sinistre). La topologia e i boreliani della retta estesa $[-\infty, +\infty]$.

Funzioni misurabili. Definizione di funzione boreliana fra due spazi topologici. Dati uno spazio misurabile X, un insieme Y e una funzione $f\colon X \to Y$, l'insieme degli $E \subset Y$ tali che $f^{-1}(E)$ sia misurabile è una σ-algebra. Una funzione da uno spazio misurabile in uno spazio topologico è misurabile se e solo se la contrimmagine di ogni boreliano è misurabile. Composizione di una funzione misurabile con una boreliana è misurabile. *Una funzione a valori in $[-\infty, +\infty]$ è misurabile se e solo se $\{x \in X \mid f(x) > \alpha\}$ è misurabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.* Se $f_n\colon X \to [-\infty, +\infty]$ è misurabile per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora $\sup_n f_n$ e $\inf_n f_n$ sono misurabili. Massimo e minimo limite di una successione di numeri reali (estesi): definizione in termini dell'insieme dei punti limite. Proprietà del massimo e minimo limite di successioni reali estese. Il massimo e minimo limite di successioni di funzioni misurabili reali estese sono pure misurabili. Esercizi sulle funzioni misurabili.

Funzioni semplici. Definizione di funzione semplice. Lo spazio vettoriale delle funzioni semplici è generato dalle funzioni caratteristiche. La funzione parte intera e il suo uso per discretizzare le funzioni misurabili reali. Ogni funzione misurabile positiva è limite puntuale di una successione crescente di funzioni semplici misurabili e positive, oltre che la combinazione lineare numerabile di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili.

Misure positive e definizione di integrale di funzioni misurabili positive. Definizione di misura positiva e di spazio di misura. Prime proprietà: il vuoto ha misura nulla, additività finita, monotonia, passaggio al limite su successioni crescenti o decrescenti di insiemi misurabili. Esempi di misure: misura nulla, misura concentrata in un punto, misura del conteggio. L'aritmetica nell'insieme $[0, +\infty]$. Definizione di integrale di una funzione misurabile positiva su un insieme misurabile. Prime proprietà. Definizione di integrale per funzioni misurabili positive. Prime proprietà: monotonia rispetto alla funzione e all'insieme, $\int_E f\,d\mu > 0$ se e solo se $\mu(\{f > 0\} \cap E) > 0$, $\int cf = c \int f$ se $c \in [0, +\infty]$.

Teoremi di passaggio al limite e integrale di funzioni di L^1. *Il teorema della convergenza monotona.* Additività dell'integrale di funzioni misurabili positive. *Integrazione per serie di funzioni misurabili positive.* Interpretazione dell'integrale rispetto alla misura del conteggio su $\mathbb{N}$ come somma della serie. Applicazione del teorema della convergenza dominata alla teoria delle serie. *Il lemma di Fatou. Esempi di disuguaglianza stretta nel lemma di Fatou.* Integrale di funzioni reali a segno qualsiasi: funzioni semi-integrabili e sommabili. L'insieme $L^1(\mu)$ delle funzioni reali f tali che $\int_X |f|\,d\mu < +\infty$. Dimostrazione che l'integrale è additivo su $L^1(\mu)$. L'integrale di funzioni reali di $L^1(\mu)$ è lineare sui reali. Lo spazio delle funzioni complesse di $L^1(\mu)$ col relativo integrale, che è lineare sui complessi. La disuguaglianza $|\int f| \le \int |f|$. Lo spazio $L^1(\mu)$ con la (semi)norma $\|f\|_1 := \int |f|$. *Il teorema della convergenza dominata.* Un sottinsieme di un insieme trascurabile può non essere misurabile. Definizione di spazio di misura completo. Il teorema del completamento degli spazi di misura. Se cambiamo una funzione su un insieme di misura nulla, il suo integrale non cambia. Proprietà vere quasi ovunque. Funzioni definite quasi ovunque. La relazione di equivalenza fra funzioni definita dall'uguaglianza quasi ovunque. Lo spazio normato L^1 ottenuto quozientando rispetto alla relazione di equivalenza. *Il teorema di integrazione per serie quando la somma delle norme in L^1 è finita. Lo spazio metrico L^1 è completo.* Se $f \ge 0$ allora $\int f = 0 \iff f = 0$ quasi ovunque. Se $f \in L^1$ allora $(\forall E \ \int_E f = 0) \iff f = 0$ quasi ovunque. Per quali f si ha che $|\int f| = \int |f|$. Se $\sum \mu(E_n) < +\infty$ allora quasi ogni punto appartiene a solo un numero finito di E_n. Rassegna dei teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale: convergenza monotona, lemma di Fatou, convergenza dominata. La funzione Gamma di Eulero-Legendre. Passaggio al limite sotto al segno di integrale per limiti in variabile reale. *Continuità della funzione Gamma* di Eulero-Legendre. Esercizi sull'integrazione astratta.

La misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$

Costruzione della misura di Lebesgue. La misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$: enunciato. Rettangoli (o pluriintervalli) in $\mathbb{R}^N$ e loro volume: prime proprietà. Definizione di misura esterna di Lebesgue. Prime proprietà della misura esterna: *vale zero sull'insieme vuoto, è monotona e numerabilmente subadditiva*. La misura esterna di un rettangolo coincide col volume. Definizione di insieme misurabile secondo Lebesgue-Carathéodory. Lemma sulla misurabilità in termini di rettangoli. I rettangoli sono misurabili. *Il teorema di Carathéodory*: l'insieme dei misurabili è una σ-algebra e su di esso la misura esterna è numerabilmente additiva. L'insieme dei misurabili secondo Lebesgue contiene gli aperti, e quindi tutti i boreliani. Lo spazio di misura di Lebesgue è completo. *Unicità della misura di Lebesgue.*

L'insieme di Vitali e l'insieme di Cantor. *L'insieme non misurabile di Vitali.* Cenno al paradosso di Banach-Tarski. Insiemi compatti con parte interna vuota e misura positiva. L'insieme di Cantor. L'insieme di Cantor è un compatto di misura zero e cardinalità del continuo. L'insieme di Cantor in termini di rappresentazione dei numeri in base 3. L'insieme dei misurabili secondo Lebesgue ha cardinalità uguale a quella dell'insieme delle parti di $\mathbb{R}$. Cenno a varianti dell'insieme di Cantor.

Il teorema di Vitali-Lebesgue. Oscillazione di una funzione in un punto. Caratterizzazione della continuità in un punto in termini di oscillazione. Definizione di funzione integrabile secondo Riemann. *Il teorema di Vitali-Lebesgue* che caratterizza le funzioni integrabili secondo Riemann in termini della misura dell'insieme dei punti di discontinuità.

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

1. Se $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ sono misurabili e $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to Y$ è continua, allora $h(x) := \Phi(f(x), g(x))$ è misurabile.
2. Il teorema della convergenza monotona.
3. Una funzione reale (estesa) è misurabile se e solo se $\{f > \alpha\}$ è misurabile $\forall\,\alpha \in \mathbb{R}$.
4. Il lemma di Fatou, con esempio di disuguaglianza stretta.
5. Il teorema della convergenza dominata.
6. Il teorema di integrazione per serie $\int \sum f_n = \sum \int f_n$ nelle ipotesi che $f_n \geq 0$, e in quelle che $\sum \|f_n\|_1 < +\infty$.
7. Lo spazio metrico L^1 è completo.
8. La funzione Gamma e la sua continuità.
9. La misura esterna di Lebesgue è nulla sull'insieme vuoto, monotona e numerabilmente subadditiva.
10. Il teorema di Carathéodory: gli insieme misurabili secondo Lebesgue formano una σ-algebra.
11. Unicità della misura di Lebesgue.
12. L'insieme non misurabile di Vitali.
13. Il teorema di Vitali-Lebesgue.