Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Analisi Matematica 5
Programma

Prof. Gianluca Gorni

Testi di riferimento: Giuseppe De Marco, *Analisi Due* (seconda edizione), Decibel-Zanichelli, capitolo 11. Materiale didattico attinente al corso è anche disponibile presso
http://www.dimi.uniud.it/~gorni/Istituzioni

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

Regolamento d'esame: L'esame consiste di uno scritto e un orale. Per lo scritto sono concesse tre ore. Gli scritti possono essere ripetuti senza limitazioni, ma ogni scritto consegnato annulla i precedenti. Chi ha superato lo scritto a un appello può dare l'orale in qualsiasi appello, o anche su appuntamento individuale.

1. Introduzione alle Equazioni Differenziali

Generalità. Esempi di semplici equazioni differenziali che nascono dalle scienze applicate: il modello malthusiano delle popolazioni, e il decadimento radioattivo. Generalità sulle equazioni differenziali: equazioni ordinarie e alle derivate parziali, equazioni e sistemi di ordine n, sistema del prim'ordine equivalente a un'equazione di ordine n.

Esempio modello. *L'equazione differenziale $y' = \alpha y$ risolta in diversi modi:* separazione di variabili, fattore integrante, serie di potenze, limite dell'iterata di una trasformazione integrale, poligonale approssimante.

Equazioni scalari e sistemi, soluzioni generali. Equazioni differenziali in forma normale. Equazioni autonome. Invarianza delle equazioni autonome per traslazione dei tempi. Trasformazione di un'equazione non autonoma in un sistema autonomo. Interpretazione geometrica dell'equazione scalare del primo ordine in forma normale in termini di campo di pendenze. Interpretazione geometrica dell'equazione vettoriale autonoma in forma normale in termini di campi vettoriali. Soluzione generale di un'equazione differenziale, con interpretazione geometrica in termini di diffeomorfismo che "appiattisce" le soluzioni. Come ricavare un'equazione differenziale soddisfatta da una famiglia di funzioni a uno o due parametri.

L'equazione $y' = f(y)$. *Studio dell'equazione scalare autonoma del prim'ordine $y' = f(y)$, con f continua.* Formula risolutiva per separazione delle variabili nelle strisce in cui f non si annulla. Uscita dalle strisce in tempo finito in termini dell'integrali impropri di $1/f$. Condizione sufficiente per l'unicità globale è che f sia derivabile. Il pennello di Peano. Studio dettagliato dell'equazione $y' = \sqrt{|y|}$ col metodo della separazione delle variabili. L'equazione logistica.

L'equazione lineare del prim'ordine. L'equazione scalare lineare del primo ordine, risolta col metodo del fattore integrante. Esempio. Esercizio: risoluzione esplicita di un'equazione lineare scalare non omogenea. Il metodo della variazione della costante.

2. Teoremi di esistenza e unicità

Impostazione del problema. Il problema generale dell'esistenza e unicità delle soluzioni dell'equazione $y' = f(t, y)$ con y vettoriale. Equivalenza con un'equazione integrale. Riformulazione in termini di punto fisso di un operatore integrale.

Contrazioni in spazi metrici. Richiami sugli spazi metrici completi. Variazione di una successione, e successioni a variazione finita. Le successioni a variazione finita sono di Cauchy, ma ci sono successioni di Cauchy a variazione infinita. Ogni successione di Cauchy ha una sottosuccessione a variazione finita. Uno spazio metrico è completo se e solo se ogni sua successione a variazione finita converge. *Il teorema del punto fisso per le contrazioni e per le mappe di cui un'iterata è contrazione.*

Teorema fondamentale di esistenza e unicità locale in un cilindro di sicurezza. Riformulazione del problema di Cauchy in termini di equazione integrale. L'operatore integrale di cui si cerca il punto fisso. Ricerca di un insieme di funzioni che viene mandato in sé dall'operatore. Cilindri di sicurezza. *Esistenza di cilindri di sicurezza locali in ipotesi di continuità di $f(t, y)$.* La completezza dello spazio delle funzioni continue su un intervallo compatto a valori in $\mathbb{R}^N$ (o in un chiuso di $\mathbb{R}^N$), con la norma della convergenza uniforme. *Teorema di esistenza e unicità della soluzione di un problema di Cauchy dentro un cilindro di sicurezza in ipotesi di Lipschitz.* Esempio: le iterate della trasformazione integrale per il problema $y'(t) = -2ty(t)$, $y(0) = 1$, confrontate con le ridotte della serie di Taylor della soluzione. Teorema di esistenza locale di Peano in ipotesi di sola continuità (senza dimostrazione).

Altri risultati in ipotesi di Lipschitz. Teorema di esistenza e unicità globale in ipotesi di Lipschitz globali. Esempio: le equazioni lineari. Teorema di esistenza e unicità locale in ipotesi di Lipschitz locali. Condizioni sufficienti per la lipschitzianità locale o globale in termini di derivate parziali. Esempio di esistenza e unicità locale senza ipotesi di Lipschitz: $y' = y \log |y|$. Versione del teorema di esistenza e unicità locale per i sistemi di ordine superiore al primo. Dipendenza della soluzione dai dati iniziali (senza dimostrazione). Flusso di un'equazione differenziale. Il flusso nel caso autonomo.

Soluzioni massimali, esistenza globale ed uscita dai compatti. In ipotesi di unicità locale, due soluzioni dello stesso problema di Cauchy coincidono sull'intersezione dei domini. Soluzioni massimali di un'equazione differenziale in ipotesi di esistenza e unicità locale. Il dominio delle soluzioni massimali è un intervallo aperto. Equivalenza fra lipschitzianità locale e lipschitzianità sui compatti. *Il teorema di esistenza e unicità globale in ipotesi di crescenza sublineare.* Esempi di applicazione del teorema di esistenza globale in ipotesi di crescenza sublineare. *Nelle ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale, il grafico delle soluzioni massimali è chiuso nel dominio di f.* L'uscita dai compatti delle soluzioni massimali. Esempio di equazione differenziale in cui l'esistenza globale si dimostra col metodo dell'uscita dai compatti. Se in un'equazione autonoma definita su tutto $\mathbb{R}^N$ una soluzione massimale è limitata, allora è definita per tutti i tempi.

2. Studio qualitativo e soluzione esplicita

Confronto, cambio di parametro, integrali primi, fattori integranti, sostituzioni. *Teorema del confronto. Il criterio dell'asintoto. Punti limite ed equilibri per le equazioni autonome.* Studio dell'equazione $y' = g(x,y)\,\mathrm{sen}^2\, y$. Studio qualitativo dell'equazione $y' = e^{y^2} - e^{x^2}$ usando il teorema del confronto. Studio dell'equazione $y'' = e^y y'$. Se $\lambda(x) > 0$ allora i due sistemi $y' = f(y)$ e $y' = \lambda(y)f(y)$ hanno le stesse traiettorie, percorse con leggi orarie diverse. Definizione di integrale primo, o costante del moto, per sistemi autonomi. Un esempio in tre dimensioni con due integrali primi. *L'equazione del pendolo: studio qualitativo dell'orbita critica e delle orbite periodiche, e calcolo del periodo.* Il metodo del fattore integrante per cercare integrali primi di sistemi piani. Esempio: il sistema predatore-preda di Volterra e Lotka. Equazioni differenziali totali e fattori integranti. Equazioni differenziali riconducibili alla separazione di variabili con un cambio di funzione incognita; equazioni omogenee, equazioni della forma $y'(x) = g(ax+by+c)$, $y'(x) = g((ax+by+c)/(px+qy+r))$, equazioni di Bernoulli. Le traiettorie dell'equazione $y'' = f(y,y')$ nel piano delle fasi (y,y') risolvono un'equazione del prim'ordine. L'equazione $(x+y+1)dx+(2x+2y-1)dy = 0$. L'equazione $uu' = u^2-t$. L'equazione $y'' = (y')^2-y$. L'equazione $(2x^2y+y^2)dx+(2x^3-xy)dy = 0$. L'equazione $y' = (x^2-y^2)/(2xy)$.

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

1. L'equazione differenziale $y' = \alpha y$ risolta in diversi modi.
2. Studio dell'equazione scalare autonoma del prim'ordine $y' = f(y)$, con f continua.
3. Il teorema del punto fisso per le contrazioni e per le mappe di cui un'iterata è contrazione
4. Esistenza di cilindri di sicurezza locali in ipotesi di continuità di $f(t,y)$.
5. Teorema di esistenza e unicità della soluzione di un problema di Cauchy dentro un cilindro di sicurezza in ipotesi di Lipschitz
6. Il teorema di esistenza e unicità globale in ipotesi di crescenza sublineare.
7. Nelle ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale, il grafico delle soluzioni massimali è chiuso nel dominio di f.
8. Teorema del confronto.
9. Il criterio dell'asintoto. Punti limite ed equilibri per le equazioni autonome.
10. L'equazione del pendolo: studio qualitativo dell'orbita critica e delle orbite periodiche, e calcolo del periodo.