Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo
Analisi Matematica 5
Programma

Prof. Gianluca Gorni

Testi di riferimento: Alessandro Fonda, *Lezioni sulla teoria dell'integrale*, Edizioni Goliardiche, Trieste. Giuseppe De Marco, *Analisi Due* (prima edizione), Decibel-Zanichelli, capitolo VI. Materiale didattico attinente al corso è anche disponibile presso

`http://www.dimi.uniud.it/~gorni/Istituzioni`

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

Regolamento d'esame: Chi intende fare gli esami di entrambi i moduli (o Analisi 5 e 6) può scegliere fra due scritti separati o il solo scritto del secondo modulo; in quest'ultimo caso il voto scritto vale per entrambi gli orali. Lo studente riceve solo il testo del modulo che ha scelto per quell'appello e ha tre ore di tempo. Gli scritti possono essere ripetuti senza limitazioni, ma ogni scritto consegnato annulla i precedenti. Chi ha superato lo scritto a un appello può dare l'orale in qualsiasi appello, o anche su appuntamento individuale.

1. Integrazione sulla retta secondo Henstock-Kurzweil (4 crediti).

Difetti dell'integrale secondo Riemann. La derivata di una funzione derivabile può non essere integrabile secondo Riemann, e quindi il teorema fondamentale del calcolo si deve scrivere in ipotesi poco eleganti. La funzione di Dirichlet non è integrabile secondo Riemann, sebbene ci sarebbero dei motivi per non ritenerla poi così brutta.

L'integrale su intervallo compatto. Definizione di partizione marcata di un intervallo e di somma di Riemann. Definizione di calibro e di partizione marcata adattata al calibro. *Teorema di Cousin sull'esistenza di partizioni adattate a un dato calibro.* Esempi di costruzione di partizioni adattate a particolari calibri. Definizione di integrale di calibro (finito o infinito) di una funzione su un intervallo compatto. Unicità dell'integrale. Dimostrazione delle formule per l'integrale di x e x^2 su intervalli, usando la definizione. *Dimostrazione che* $\int_0^1 1/\sqrt{x}\,dx = 2$ *usando la definizione.*

Integrale e primitive. *Il teorema fondamentale del calcolo per l'integrale della derivata di una funzione derivabile su tutto un intervallo compatto. La funzione di Dirichlet è integrabile.* Generalizzazione del teorema fondamentale del calcolo al caso in cui F è continua ma può non essere derivabile in un insieme numerabile di punti. Esempi. Criterio di Cauchy per l'integrabilità. *Integrabilità su sottointervalli.* Integrabilità secondo Riemann. Integrabilità delle funzioni continue. La derivata della funzione integrale nei punti di continuità della funzione integranda (variante del teorema fondamentale del calcolo).

Integrabilità assoluta e passaggio al limite sotto il segno di integrale. *Teorema di Saks-Henstock.* Sottopartizioni. Funzioni assolutamente integrabili, o integrabili secondo Lebesgue. *Caratterizzazione delle funzioni assolutamente integrabili.* L'insieme $L^1(a,b)$ è uno spazio vettoriale (semi)normato. L'insieme $L^1(a,b)$ è stabile per massimi, minimi, parti positive e negative. Esempio di una funzione integrabile ma non in L^1. *Il teorema della convergenza monotona.* Integrazione di serie di funzioni positive. Esempio di applicazione. Richiami su massimo e minimo limite di successioni reali. *Il teorema della convergenza dominata.* Esempio di applicazione.

Integrale su intervalli non compatti. *Il teorema di Hake.* Continuità della funzione integrale. Definizione di integrale su intervalli non compatti. Funzioni localmente integrabili. Integrabilità di $1/x^a$ su $[1,\infty[$ e su $]0,1]$. Criterio di integrabilità di Cauchy per funzioni localmente integrabili. Criterio del confronto. La funzione $(\operatorname{sen} x)/x$ è integrabile su $[0,\infty[$ ma non è in L^1. Criterio del confronto asintotico. Esempio. Teorema della convergenza dominata (o monotona) nel caso di intervalli non compatti.

2. Integrali dipendenti da parametro (2 crediti)

Esempi di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Integrazione per serie di funzioni di L^1. Esempi di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Integrazione per serie di funzioni di L^1. Esempio. *Teoremi di continuità e derivabilità di integrali dipendenti da parametro.* Esercizi. Esempi di discontinuità o non derivabilità per integrali impropri dipendenti da parametro. Studio di un integrale improprio dipendente da parametro. *Calcolo dell'integrale della gaussiana usando gli integrali dipendenti da parametro. La funzione Gamma di Eulero-Legendre.* La funzione Beta. Studio di un integrali impropri dipendenti da parametro. Esercizi.

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

1. Teorema di Cousin sull'esistenza di partizioni adattate a un dato calibro
2. Dimostrazione che $\int_0^1 1/\sqrt{x}\,dx = 2$ usando la definizione
3. Il teorema fondamentale del calcolo per l'integrale della derivata di una funzione derivabile su tutto un intervallo compatto
4. La funzione di Dirichlet è integrabile
5. Integrabilità su sottointervalli
6. Teorema di Saks-Henstock
7. Caratterizzazione delle funzioni assolutamente integrabili
8. Il teorema della convergenza monotona
9. Il teorema della convergenza dominata
10. Il teorema di Hake
11. Teoremi di continuità e derivabilità di integrali dipendenti da parametro
12. Calcolo dell'integrale della gaussiana usando gli integrali dipendenti da parametro
13. La funzione Gamma di Eulero-Legendre