Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2001/2002

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo
Programma

Prof. Gianluca Gorni

Testo di riferimento: Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill (traduzione italiana presso Boringhieri). Appunti del corso. Materiale didattico attinente al corso è anche disponibile presso

`http://www.dimi.uniud.it/~gorni`

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

Regolamento d'esame: Chi intende fare gli esami di entrambi i moduli può scegliere fra due scritti separati o il solo scritto del secondo modulo; in quest'ultimo caso il voto scritto vale per entrambi gli orali. Lo studente riceve solo il testo del modulo che ha scelto per quell'appello e ha tre ore di tempo. Gli scritti possono essere ripetuti senza limitazioni, ma ogni scritto consegnato annulla i precedenti. Chi ha superato lo scritto a un appello può dare l'orale in qualsiasi appello, o anche su appuntamento individuale.

1. Misura e integrazione astratte.

Difetti dell'integrale secondo Riemann. Motivi di insoddisfazione con l'integrale secondo Riemann: integrali "impropri", teorema della convergenza limitata (senza dimostrazione) e la mancata conservazione dell'integrabilità per convergenza puntuale. Incompletezza dello spazio delle funzioni integrabili rispetto alla norma $\int |f(x)|dx$.

σ-algebre e funzioni misurabili. Definizione di σ-algebra e di spazio misurabile, comparato con la definizione di topologia e di spazio topologico. Prime proprietà degli spazi misurabili. Funzioni misurabili da uno spazio misurabile in uno spazio topologico. Ogni aperto di $\mathbb{R}^2$ è l'unione di una famiglia numerabile di rettangoli aperti. Una funzione a valori in $\mathbb{R}^2$ è misurabile se e solo se ogni sua componente è misurabile. Operazioni con le funzioni misurabili. Le σ-algebre banali. Esempi di σ-algebre su insiemi finiti. La σ-algebra generata da una famiglia di sottinsiemi di X. La σ-algebra dei boreliani di uno spazio topologico e le funzioni boreliane fra spazi topologici. Esempi: gli intervalli sono tutti boreliani di $\mathbb{R}$. La famiglia dei boreliani di $\mathbb{R}$ è generata dalla famiglia delle semirette della forma $]a, +\infty[$ al variare di $a \in \mathbb{Q}$. Criteri di borelianità e di misurabilità, con applicazioni. Estremi superiori, inferiori, massimi e minimi limiti di successioni di funzioni misurabili. Discretizzazione e rappresentazione binaria dei numeri reali. Funzioni semplici su uno spazio misurabile. *Le funzioni misurabili positive si possono scrivere come limite puntuale di successioni crescenti di funzioni semplici misurabili positive, e anche come combinazioni lineari numerabili di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili.*

Misure su spazi misurabili. Definizione di misure positive e spazi di misura. L'insieme vuoto ha misura nulla. Additività finita. Monotonia rispetto all'insieme. *Passaggio al limite per successioni monotone di insiemi.* Esempi di misure: misura identicamente nulla, misura concentrata in un punto, misura del conteggio. Esempio di una successione decrescente di insiemi per la quale il limite delle misure non è la misura dell'intersezione. Perché non si può estendere la definizione alle additività più che numerabili. Aritmetica su $[0, +\infty]$, in particolare la convenzione $0 \cdot (+\infty) = 0$.

Integrale di funzioni misurabili positive. Definizione di integrale di una funzione semplice misurabile positiva. Prime proprietà: se s vale c su E allora $\int_E s\, d\mu = c\mu(E)$, la funzione $E \mapsto \int_E s\, d\mu$ è una misura, $\int_E (s+t) d\mu = \int_E s\, d\mu + \int_E t\, d\mu$, se $0 \le s \le t$ su E allora $\int_E s\, d\mu \le \int_E t\, d\mu$. Definizione di integrale di una funzione misurabile positiva. Prime proprietà dell'integrale di funzioni misurabili positive: buona definizione, monotonia rispetto all'insieme e alla funzione, condizioni perché l'integrale sia nullo, moltiplicazione per una costante positiva, integrale su tutto X e su E. *Teorema della convergenza monotona. Integrale della somma di due funzioni misurabili positive. Integrale di una serie di funzioni misurabili positive. Lemma di Fatou.* L'integrazione rispetto alla misura definita da $\varphi(E) := \int_E f\, d\mu$. L'integrale nel caso della misura nulla e della misura concentrata in un punto.

Integrale di funzioni reali o complesse e lo spazio normato $L^1(\mu)$. Integrale di funzioni reali a segno qualsiasi, o di funzioni complesse: funzioni semiintegrabili e funzioni di $L^1(\mu)$. Linearità dell'integrale di funzioni di $L^1(\mu)$. La disuguaglianza $|\int f| \le \int |f|$. *Teorema della convergenza dominata.* L'integrale nel caso della misura concentrata in un punto e nel caso della misura del conteggio su $\mathbb{N}$. Riformulazione della convergenza assoluta di serie in termini di integrazione rispetto alla misura del conteggio. Il teorema della convergenza dominata specializzato alle serie. Applicazione: continuità della funzione ζ di Riemann. Insiemi trascurabili in uno spazio di misura. Proprietà vere μ-quasi ovunque. La relazione di equivalenza fra funzioni definita dall'uguaglianza quasi ovunque. Estensione di una funzione misurabile definita quasi ovunque a una definita ovunque. Integrale di una funzione definita quasi ovunque. Spazi di misura completi e teorema del completamento. *Teorema dell'integrazione per serie nell'ipotesi che $\sum \|f_n\|_1 < +\infty$.* Condizioni necessarie e sufficienti per l'uguaglianza quasi ovunque di funzioni positive o in L^1. Esercizi sulla misura e l'integrazione astratta.

2. Misure boreliane e misura di Lebesgue sulla retta

Introduzione e preliminari topologici. Idee generali su come definire una misura sui boreliani di uno spazio topologico presupponendo di saper integrare le funzioni continue. Preliminari topologici: definizione di spazi topologici di Hausdorff e localmente compatti. Prime proprietà degli insiemi compatti. In uno spazio di Hausdorff localmente compatto, *dato un compatto K e un aperto V che lo contiene esiste un aperto contenente K e la cui chiusura è compatta e contenuta in V.* Definizione di funzioni reali semicontinue inferiormente e superiormente. Funzioni continue a supporto compatto. La notazione $K \prec f \prec V$. *Il lemma di Urysohn. Partizioni continue dell'unità.*

Teorema di rappresentazione di Riesz. *Teorema di Rappresentazione di Riesz. Enunciato e primi commenti. Unicità della misura data la σ-algebra. Costruzione di* μ *e di* $\mathcal{M}$ *a partire dal funzionale lineare positivo* $\Lambda\colon C_c(X) \to \mathbb{C}$. *Monotonia di* μ *e completezza dello spazio di misura. Subadditività numerabile di* μ. Dimostrazione che $\mathcal{M}$ è una σ-algebra e che μ è una misura su $\mathcal{M}$. Dimostrazione che $\Lambda f = \int_X f\, d\mu$ per ogni $f \in C_c(X)$.

Regolarità interna ed esterna delle misure boreliane. Definizione di regolarità interna ed esterna di misure boreliane. Insiemi σ-compatti in uno spazio topologico. *Rafforzamento del teorema di rappresentazione di Riesz nell'ipotesi che lo spazio topologico sia σ-compatto. Regolarità delle misure nell'ipotesi che ogni aperto dello spazio topologico sia σ-compatto.*

La misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$. *Teorema di esistenza e unicità della misura di Lebesgue su* $\mathbb{R}$. *Le funzioni integrabili secondo Riemann sono integrabili anche secondo Lebesgue, con lo stesso integrale.* Integrali impropri assolutamente convergenti e integrale secondo Lebesgue. Esempi di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

1. Le funzioni misurabili positive si possono scrivere come limite puntuale di successioni crescenti di funzioni semplici misurabili positive, e anche come combinazioni lineari numerabili di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili.
2. Passaggio al limite della misura su successioni monotone di insiemi.
3. Teorema della convergenza monotona.
4. Integrale della somma di due o di una serie di funzioni misurabili positive.
5. Lemma di Fatou.
6. Teorema della convergenza dominata.
7. Teorema dell'integrazione per serie nell'ipotesi che $\sum \|f_n\|_1 < +\infty$.
8. Dato un compatto K e un aperto V che lo contiene esiste un aperto contenente K e la cui chiusura è compatta e contenuta in V.
9. Lemma di Urysohn.
10. Partizioni continue dell'unità.
11. Teorema di rappresentazione di Riesz, fino alla dimostrazione che μ è numerabilmente subadditiva. (Per questo teorema si possono consultare appunti durante l'orale).
12. Rafforzamento del teorema di rappresentazione di Riesz nell'ipotesi che lo spazio topologico sia σ-compatto.
13. Regolarità delle misure nell'ipotesi che ogni aperto dello spazio topologico sia σ-compatto.
14. Costruzione della misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$ usando il teorema di rappresentazione di Riesz.
15. Le funzioni integrabili secondo Riemann sono misurabili e integrabili secondo Lebesgue, con lo stesso integrale.