Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2000/2001

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo
Programma

Prof. GIANLUCA GORNI

Testi di riferimento: WALTER RUDIN, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill (traduzione italiana presso Boringhieri). GIUSEPPE DE MARCO, *Analisi Due* (prima edizione), Decibel-Zanichelli. Appunti del corso. Materiale didattico attinente al corso è anche disponibile presso

`http://www.dimi.uniud.it/~gorni`

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

Regolamento d'esame: Chi intende fare gli esami di entrambi i moduli può scegliere fra due scritti separati o il solo scritto del secondo modulo; in quest'ultimo caso il voto scritto vale per entrambi gli orali. Lo studente riceve solo il testo del modulo che ha scelto per quell'appello e ha tre ore di tempo. Gli scritti possono essere ripetuti senza limitazioni, ma ogni scritto consegnato annulla i precedenti. Chi ha superato lo scritto a un appello può dare l'orale in qualsiasi appello, o anche su appuntamento individuale.

1. Misura e integrazione astratte.

Rudin, cap. 1

Difetti dell'integrale secondo Riemann. Pro e contro della teoria dell'integrale di Riemann. Una successione di funzioni integrabili secondo Riemann che converge puntualmente a una funzione non integrabile. Teorema della convergenza limitata per l'integrale di Riemann (solo enunciato). L'insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann non è stabile per convergenza puntuale limitata. Sull'insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann su $[a,b]$ la distanza $d(f,g) := \int_a^b |f-g|dx$ dà uno spazio metrico non completo (senza dimostrazione).

σ-algebre. Definizione di σ-algebra e di spazio misurabile. Confronto con la definizione di topologia e di spazio topologico. Prime conseguenze degli assiomi: stabilità per intersezioni numerabili e per differenze. Esempi di σ-algebre. La σ-algebra generata da una famiglia di insiemi. La σ-algebra degli insiemi boreliani in uno spazio topologico. Gli intervalli sono tutti boreliani di $\mathbb{R}$. Ogni aperto di $\mathbb{R}$ è unione di una famiglia al più numerabile di intervalli aperti. La famiglia dei boreliani di $\mathbb{R}$ è generata dalla famiglia delle semirette della forma $]a,+\infty[$ al variare di $a \in \mathbb{Q}$.

Funzioni misurabili. Funzioni misurabili da uno spazio misurabile in uno spazio topologico. Composizione di funzioni misurabili con funzioni continue. Funzioni boreliane fra spazi topologici. Le funzioni continue sono boreliane. Composizione di una funzione misurabile con una funzione boreliana è misurabile. La funzione "parte intera" è boreliana. Ogni aperto di $\mathbb{R}^n$ è unione di una famiglia numerabile di rettangoli aperti.

Una funzione a valori in $\mathbb{R}^n$ è misurabile se e solo se ogni sua componente è misurabile. Somma e prodotto di funzioni misurabili reali sono misurabili. Funzione caratteristica di un insieme. Funzioni misurabili definite su sottinsiemi di uno spazio misurabile e funzioni definite per incollamenti. Funzioni misurabili a valori complessi e loro decomposizione polare. L'insieme dei numeri reali estesi $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, la sua topologia e i suoi boreliani. L'insieme delle funzioni misurabili a valori reali estesi è stabile per inviluppi superiori e inferiori numerabili e per limiti inferiori e superiori di successioni. Se una successione di funzioni reali estese misurabili converge puntualmente, il limite è pure misurabile.

Funzioni semplici. L'approssimazione di un numero reale x con $x_n := 2^{-n}\lfloor 2^n x \rfloor$. Funzioni semplici. *Approssimazione di una funzione reale estesa* ≥ 0 *e misurabile con una successione crescente di funzioni semplici misurabili finite e* ≥ 0. Le funzioni reali non negative e misurabili si possono scrivere come la combinazione lineare numerabile di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili a coefficienti ≥ 0.

Misure su spazi misurabili. Definizione di misure positive e spazi di misura. L'insieme vuoto ha misura nulla. Additività finita. Monotonia rispetto all'insieme. Passaggio al limite per successioni monotone di insiemi. Esempi di misure: misura identicamente nulla, misura concentrata in un punto, misura del conteggio. Esempio di una successione decrescente di insiemi per la quale il limite delle misure non è la misura dell'intersezione. Aritmetica su $[0, +\infty]$, in particolare la convenzione $0 \cdot (+\infty) = 0$.

Integrale di funzioni misurabili positive. Definizione di integrale di una funzione semplice misurabile positiva. Proprietà dell'integrale di funzioni semplici positive: rispetto all'insieme è una misura, rispetto alla funzione è additivo e monotono. Definizione di integrale di una funzione misurabile positiva. Prime proprietà. Integrale del prodotto di una funzione positiva per una costante positiva. *Teorema della convergenza monotona.* Teorema dell'integrazione della somma e delle serie positive. *Lemma di Fatou.* L'integrazione rispetto alla misura definita da $\varphi(E) := \int_E f \, d\mu$. L'integrale nel caso della misura nulla e della misura concentrata in un punto. Definizione di somma infinita di numeri non negativi. L'integrale rispetto alla misura del conteggio. Somme infinite di numeri positivi. Le serie positive viste come integrali rispetto alla misura del conteggio. Ricadute della teoria dell'integrale sulla teoria delle serie.

Integrale di funzioni reali o complesse e lo spazio normato $L^1(\mu)$. Definizione di funzioni sommabili e di $L^1(\mu)$. Definizione di integrale per funzioni sommabili e per funzioni reali semiintegrabili. Linearità dell'integrale su $L^1(\mu)$. Dimostrazione che $|\int f| \leq \int |f|$. *Teorema della convergenza dominata.* Confronto fra i vari teoremi di convergenza degli integrali. Applicazione alle serie dipendenti da parametro. Insiemi trascurabili, proprietà vere quasi ovunque, funzioni uguali quasi ovunque. Funzioni definite quasi ovunque. Spazi di misura completi. Teorema del completamento degli spazi di misura. $L^1(\mu)$ visto come quoziente di un insieme di funzioni rispetto alla relazione di equivalenza dell'uguaglianza quasi ovunque. $L^1(\mu)$ è uno spazio normato. *Se* $\sum \|f\|_{L^1} < +\infty$ *allora* $\sum f_n$ *converge quasi ovunque e in* $L^1(\mu)$*, e inoltre* $\int \sum f_n = \sum \int f_n$. Caratterizzazione della completezza di uno spazio metrico in termini di successioni a variazione limitata. *Lo spazio normato* $L^1(\mu)$ *è completo.* Confronto fra convergenza puntuale e convergenza in $L^1(\mu)$. Lo spazio ℓ^1 e le serie convergenti assolutamente. Alcune proprietà (quasi ovunque) delle funzioni come conseguenza di proprietà dei loro integrali. Esercizi sull'integrazione astratta.

2. Misure boreliane e misura di Lebesgue sulla retta

Rudin cap. 2. De Marco VII.5, VI.1-2. Appunti del corso

Introduzione e preliminari topologici. Idee generali su come definire una misura sui boreliani di uno spazio topologico presupponendo di saper integrare le funzioni continue. Preliminari topologici: definizione di spazi topologici di Hausdorff e localmente compatti. Prime proprietà degli insiemi compatti. In uno spazio di Hausdorff localmente compatto, *dato un compatto K e un aperto V che lo contiene esiste un aperto contenente K e la cui chiusura è compatta e contenuta in V*. Definizione di funzioni reali semicontinue inferiormente e superiormente. Funzioni continue a supporto compatto. La notazione $K \prec f \prec V$. *Il lemma di Urysohn.* Dimostrazione del lemma di Urysohn (continuazione). Partizioni continue dell'unità.

Teorema di rappresentazione di Riesz. *Teorema di Rappresentazione di Riesz.* Enunciato e primi commenti. Unicità della misura data la σ-algebra. Costruzione di μ e di $\mathcal{M}$ a partire dal funzionale lineare positivo $\Lambda\colon C_c(X) \to \mathbb{C}$. Monotonia di μ e completezza dello spazio di misura. Subadditività numerabile di μ. Dimostrazione che $\mathcal{M}$ è una σ-algebra e che μ è una misura su $\mathcal{M}$. Dimostrazione che $\Lambda f = \int_X f\, d\mu$ per ogni $f \in C_c(X)$.

Regolarità interna ed esterna delle misure boreliane. Definizione di regolarità interna ed esterna di misure boreliane. Insiemi σ-compatti e spazi di misura σ-finita. *Rafforzamento del teorema di rappresentazione di Riesz nell'ipotesi che lo spazio topologico sia σ-compatto. Rafforzamento del teorema di rappresentazione di Riesz nell'ipotesi che ogni aperto dello spazio topologico sia σ-compatto.*

La misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$. *Teorema di esistenza e unicità della misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$. L'insieme non misurabile di Vitali.* Cenni all'esistenza di misurabili non boreliani. *Le funzioni integrabili secondo Riemann sono integrabili anche secondo Lebesgue, con lo stesso integrale.* Oscillazione di una funzione in un punto. *Teorema di Vitali-Lebesgue.*

Integrali dipendenti da un parametro. Integrali dipendenti da parametro: generalità. Teorema generale di continuità. Caso particolare dell'integrale di una funzione continua su un intervallo compatto. Caso di intervallo compatto a estremi variabili. Derivabilità sotto il segno di integrale: caso generale e caso compatto. Esempio. *Dimostrazione che $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ usando gli integrali dipendenti da parametro.* Studio della funzione $F(x) := \int_{\mathbb{R}} x^2/(1 + x^2t^2)\, dt$. *La funzione Gamma di Eulero-Legendre*: definizione, dominio, continuità, limiti agli estremi. La funzione Gamma: derivabilità, convessità, valori notevoli, formula fondamentale $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$, estensione al piano complesso. Formule equivalenti della funzione Beta. Studio di $F(x) := \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \cos(2tx) dt$ (integrale di Laplace). Esercizi sugli integrali dipendenti da parametro.

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

Per il teorema contrassegnato da un asterisco si possono consultare libri e appunti durante l'orale.

1. Approssimazione di funzioni misurabili positive con successioni o serie di funzioni semplici misurabili.
2. Teorema della convergenza monotona.
3. Lemma di Fatou.
4. Teorema della convergenza dominata.
5. Se $\sum \|f\|_{L^1} < +\infty$ allora $\sum f_n$ converge quasi ovunque e in $L^1(\mu)$, e inoltre $\int \sum f_n = \sum \int f_n$, e completezza dello spazio normato $L^1(\mu)$.
6. Dato un compatto K e un aperto V che lo contiene esiste un aperto contenente K e la cui chiusura è compatta e contenuta in V.
7. Lemma di Urysohn.
8. * Teorema di rappresentazione di Riesz.
9. Rafforzamenti del teorema di Riesz in ipotesi di σ-compattezza dello spazio, o di σ-compattezza di tutti i suoi aperti.
10. Costruzione della misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$ usando il teorema di rappresentazione di Riesz.
11. L'insieme non misurabile di Vitali.
12. Le funzioni integrabili secondo Riemann sono misurabili e integrabili secondo Lebesgue, con lo stesso integrale.
13. Teorema di Vitali-Lebesgue.
14. Calcolo dell'integrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$ usando gli integrali dipendenti da un parametro.
15. Proprietà della funzione Gamma.