Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2001/02

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, I Modulo

Prova Scritta del 9 gennaio 2003

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. a. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ debolmente crescente. Dimostrare che f è boreliana.

b. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua in tutti i punti irrazionali. Dimostrare che f è boreliana.
($f^{-1}(V) = f|_{\mathbb{Q}}^{-1}(V) \cup f|_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}^{-1}(V)$. Se V è aperto allora $f|_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}^{-1}(V)$ è un insieme aperto nella topologia di...).

2. Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{n^2}{\sqrt{t-t^2}(1+2n-\sqrt{t})^2}\,dt = \frac{\pi}{4}\,.$$

(Una volta passati al limite sotto il segno di integrale, può venire comodo il cambio di variabile $t = (1+y)/2$).

Punti: 10+15, 20.