Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2001/02

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta del 20 dicembre 2001

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Sia μ una misura positiva sui boreliani di $\mathbb{R}$, che sia finita sui compatti, con $\mu([0,1[) = 1$, e tale che per ogni boreliano E, per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si abbia che

$$\mu\big(2^{-m} + E\big) = 2^{2^{-m}} \mu(E)\,.$$

Poniamo $\varphi(E) := \int_E 2^x \log 2\, dx$ quando E è un boreliano di $\mathbb{R}$.

a. Dimostrare che se I è un intervallo di estremi $a \le b$, allora $\mu(I) = 2^b - 2^a$. (Per $2^{\pm\infty}$ si intendono i limiti). (Cominciare dal caso $[0, 2^{-n}[$, poi $[m2^{-n}, (m+1)2^{-n}[$; il caso generale si avrà passando al limite su successioni crescenti o decrescenti di intervalli).

b. Dimostrare che la funzione φ è una misura positiva sui boreliani di $\mathbb{R}$, finita sui compatti. Lo stesso per la funzione $E \mapsto \mu(x+E)$, per $x \in \mathbb{R}$ fissato.

c. Dimostrare che $\mu = \varphi$ e che $\mu(x+E) = 2^x \mu(E)$ per ogni boreliano E e per ogni $x \in \mathbb{R}$. (Partire dall'uguaglianza sugli intervalli aperti, poi sugli aperti, e poi usare la regolarità delle misure in gioco).

2. Mostrare che $|(1 - \frac{x}{n})^n e^{-2x}| \le |(1 + \frac{x}{n})^n e^{-2x}| \le e^{-x}$ per ogni $x \ge 0$ e ogni $n \in \mathbb{N}$, e calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx\,.$$

3. a. Mostrare che $\max_{y\ge 1}(y-1)e^{-\lambda y} = 1/(\lambda e^{1+\lambda})$ per $\lambda > 0$.

b. Mostrare che per $0 < \lambda_1 < \lambda$

$$\left|\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{-\lambda x}\right| \le \begin{cases} e^{-(1+\lambda)x} & \text{per } 0 \le x < n, \\ e^{-(\lambda-\lambda_1)x}/(\lambda_1 e^{1+\lambda_1})^n & \text{per } x \ge n. \end{cases}$$

c. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{-x/2} dx\,.$$

d. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{-x/4} dx\,.$$

(Spezzare sui due intervalli $[0,n]$ e $]n, +\infty[$. Sul secondo cambiando variabile $y = x/n$ e usando il punto **a** ci si può riportare al lemma di Fatou).

Punti: 15+10+10, 10, 5+5+10+15.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta del 20 dicembre 2001

Svolgimento

1. a. Dimostriamo per induzione che

$$\mu\big([0,2^{-n}[\big) = 2^{2^{-n}} - 2^0 = 2^{2^{-n}} - 1\,.$$

Per $n=0$ è una delle ipotesi su μ. Supponiamo che la formula sia vera per un certo n. Spezziamo in due parti disgiunte l'intervallo $[0,2^{-n}[$ col punto medio:

$$\Big[0,\frac{1}{2^n}\Big[= \Big[0,\frac{1}{2^{n+1}}\Big[\cup \Big[\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\Big[\,,$$

e poi applichiamo la proprietà della misura μ secondo cui $\mu\big(2^{-m}+E\big) = 2^{2^{-m}}\mu(E)$ per ogni $m\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
2^{2^{-n}} - 1 = \mu\big([0,2^{-n}[\big) &= \mu\bigg(\Big[0,\frac{1}{2^{n+1}}\Big[\bigg) + \mu\bigg(\Big[\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\Big[\bigg) = \\
&= \mu\bigg(\Big[0,\frac{1}{2^{n+1}}\Big[\bigg) + \mu\bigg(\frac{1}{2^{n+1}} + \Big[0,\frac{1}{2^{n+1}}\Big[\bigg) = \\
&= \mu\bigg(\Big[0,\frac{1}{2^{n+1}}\Big[\bigg) + 2^{2^{-n-1}}\mu\bigg(\Big[0,\frac{1}{2^{n+1}}\Big[\bigg) = (1+2^{2^{-n-1}})\mu\bigg(\Big[0,\frac{1}{2^{n+1}}\Big[\bigg)\,.
\end{aligned}$$

Da questa uguaglianza si può ricavare $\mu(0,2^{-n-1})$, e facendo apparire un prodotto notevole del tipo $a^2-1=(a-1)(a+1)$ l'espressione si semplifica:

$$\begin{aligned}
\mu\bigg(\Big[0,\frac{1}{2^{n+1}}\Big[\bigg) &= (2^{2^{-n}}-1)\cdot\frac{1}{1+2^{2^{-n-1}}} = (2^{2^{-n}/2}-1)(2^{2^{-n}/2}+1)\cdot\frac{1}{1+2^{2^{-n-1}}} = \\
&= 2^{2^{-n}/2} - 1 = 2^{2^{-n-1}} - 1\,,
\end{aligned}$$

che è proprio la tesi con $n+1$ al posto di n.
Dimostriamo per induzione su $m\in\mathbb{N}$ che per ogni $n\in\mathbb{N}$ fissato si ha che

$$\mu\bigg(\Big[\frac{m}{2^n},\frac{m+1}{2^n}\Big[\bigg) = 2^{(m+1)/2^n} - 2^{m/2^n}\,.$$

Per $m=0$ è quanto visto prima. Supponiamo che la formula sia vera per un certo $m\ge 1$. Possiamo scrivere

$$\Big[\frac{m+1}{2^n},\frac{m+2}{2^n}\Big[= \frac{1}{2^n} + \Big[\frac{m}{2^n},\frac{m+1}{2^n}\Big[\,,$$

da cui, sempre per la formula di traslazione $\mu\big(2^{-n}+E\big) = 2^{2^{-n}}\mu(E)$,

$$\begin{aligned}
\mu\bigg(\Big[\frac{m+1}{2^n},\frac{m+2}{2^n}\Big[\bigg) &= \mu\bigg(\frac{1}{2^n} + \Big[\frac{m}{2^n},\frac{m+1}{2^n}\Big[\bigg) = 2^{2^{-n}}\mu\bigg(\Big[\frac{m}{2^n},\frac{m+1}{2^n}\Big[\bigg) = \\
&= 2^{1/2^n}\cdot\big(2^{(m+1)/2^n} - 2^{m/2^n}\big) = 2^{(m+2)/2^n} - 2^{(m+1)/2^n}\,,
\end{aligned}$$

che è la tesi con $m+1$ al posto di m.

Dimostriamo per induzione su $m \in \mathbb{N}$ che per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato

$$\mu\Big(\Big[\frac{-m}{2^n}, \frac{-m+1}{2^n}\Big[\Big) = 2^{(-m+1)/2^n} - 2^{-m/2^n} .$$

Per $m = 0$ è noto. Supponiamo che sia vero per un certo $m \geq 0$. Possiamo scrivere

$$\frac{1}{2^n} + \Big[\frac{-(m+1)}{2^n}, \frac{-(m+1)+1}{2^n}\Big[= \Big[\frac{-m}{2^n}, \frac{-m+1}{2^n}\Big[.$$

Come sopra,

$$\begin{aligned} 2^{(-m+1)/2^n} - 2^{-m/2^n} &= \mu\Big(\Big[\frac{-m}{2^n}, \frac{-m+1}{2^n}\Big[\Big) = \mu\Big(\frac{1}{2^n} + \Big[\frac{-(m+1)}{2^n}, \frac{-(m+1)+1}{2^n}\Big[\Big) = \\ &= 2^{2^{-n}}\mu\Big(\Big[\frac{-(m+1)}{2^n}, \frac{-(m+1)+1}{2^n}\Big[\Big) , \end{aligned}$$

da cui

$$\mu\Big(\Big[\frac{-(m+1)}{2^n}, \frac{-(m+1)+1}{2^n}\Big[\Big) = 2^{-1/2^n} \cdot (2^{(-m+1)/2^n} - 2^{-m/2^n}) = 2^{-m/2^n} - 2^{-(m+1)/2^n} ,$$

che è la tesi con $m+1$ al posto di m.
Insomma, la formula

$$\mu\Big(\Big[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}\Big[\Big) = 2^{(m+1)/2^n} - 2^{m/2^n}$$

vale per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $m \in \mathbb{Z}$. Sia ora $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ con $m_1 < m_2$. Allora, spezzando in un'unione disgiunta di sottointervalli e telescopizzando la somma che risulta,

$$\begin{aligned} \mu\Big(\Big[\frac{m_1}{2^n}, \frac{m_2}{2^n}\Big[\Big) &= \mu\Big(\bigcup_{k=m_1}^{m_2-1}\Big[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\Big[\Big) = \sum_{k=m_1}^{m_2-1}\mu\Big(\Big[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\Big[\Big) = \sum_{k=m_1}^{m_2-1}(2^{(k+1)/2^n} - 2^{k/2^n}) = \\ &= (2^{(m_1+1)/2^n} - 2^{m_1/2^n}) + (2^{(m_1+2)/2^n} - 2^{(m_1+1)/2^n}) + \cdots + (2^{(m_2)/2^n} - 2^{(m_2-1)/2^n}) = \\ &= 2^{(m+1)/2^n} - 2^{m/2^n} . \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto che la formula

$$\mu\big([a,b[\big) = 2^b - 2^a$$

vale non appena $a < b$ sono due *numeri binari finiti*. Passiamo al caso di un intervallo aperto $]a,b[$ con $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $a < b$. Esistono due successioni a_n, b_n di numeri binari finiti tali che $a_n \to a$, $b_n \to b$ e $a < a_{n+1} < a_n < b_n \leq b_{n+1} \leq b$. Poiché

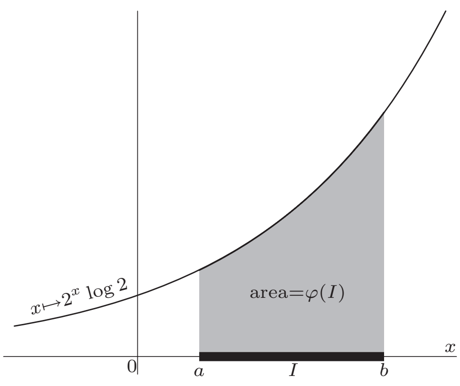
$$[a_{n+1}, b_{n+1}[\supset [a_n, b_n[\qquad \text{e} \qquad]a,b[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n[,$$

per le proprietà generali delle misure abbiamo che

$$\mu\big(]a,b[\big) = \lim_{n\to+\infty} \mu\big([a_n, b_n[\big) = \lim_{n\to+\infty} (2^{b_n} - 2^{a_n}) = 2^b - 2^a .$$

Gli intervalli non aperti si possono scrivere come unioni o intersezioni di successioni monotone di intervalli aperti. Quindi la formula della misura di un intervallo passa al limite e vale per tutti gli intervalli.

b. La φ è numerabilmente additiva. Infatti se $E = \bigcup_n E_n$, dove gli E_n sono boreliani a due a due disgiunti, possiamo scrivere



$$\begin{aligned}\sum_n \varphi(E_n) &= \sum_n \int_{E_n} 2^x \log 2\, dx = \sum_n \int_{\mathbb{R}} \underbrace{2^x \chi_{E_n}(x)}_{\geq 0} \log 2\, dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} 2^x \sum_n \chi_{E_n}(x) \log 2\, dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} 2^x \chi_{\bigcup E_n}(x) \log 2\, dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} 2^x \chi_E(x) \log 2\, dx = \int_E 2^x \log 2\, dx = \varphi(E)\,.\end{aligned}$$

(In generale se f è misurabile positiva e λ è una misura, la funzione $E \mapsto \int_E f\, d\lambda$ è pure una misura). Anche la funzione $E \mapsto \mu(x+E)$ è numerabilmente additiva. Ricordiamoci infatti che le traslazioni mandano boreliani a due a due disgiunti in boreliani a due a due disgiunti, per cui

$$\mu(x+E) = \mu\big(x + \bigcup_n E_n\big) = \mu\big(\bigcup_n (x+E_n)\big) = \sum_n \mu(x+E_n) = \sum_n \mu(x+E_n)\,.$$

Entrambe le funzioni φ e $E \mapsto \mu(x+E)$ sono evidentemente non negative, e nulle sull'insieme vuoto. Pertanto sono misure sui boreliani di $\mathbb{R}$. Sono entrambe finite sui compatti: la φ perché integrale su un compatto di una funzione, l'altra perché le traslazioni (in generale le funzioni continue) mandano compatti in compatti.

c. L'uguaglianza $\mu(E) = \varphi(E)$ vale quando E è un intervallo aperto, giacché

$$\varphi(E) = \int_{]a,b[} 2^x \log 2\, dx = \big[2^x\big]_a^b = 2^b - 2^a = \mu\big(]a,b[\big)\,.$$

Anche l'uguaglianza $\mu(x+E) = 2^x \mu(E)$ vale quando E è un intervallo aperto:

$$\begin{aligned}\mu\big(x +]a,b[\big) &= \mu\big(]x+a, x+b[\big) = \varphi\big(]x+a, x+b[\big) = \\ &= \int_{a+x}^{b+x} 2^x \log 2\, dx = 2^{b+x} - 2^{a+x} = 2^x(2^b - 2^a) = \\ &= 2^x \varphi\big(]a,b[\big) = 2^x \mu\big(]a,b[\big)\,.\end{aligned}$$

Sappiamo che un sottinsieme aperto V di $\mathbb{R}$ è unione di una famiglia al più numerabile di intervalli aperti I_n a due a due disgiunti. Quindi le due misure μ, φ coincidono su V:

$$\begin{aligned}\mu(V) &= \mu\big(\bigcup I_n\big) = \sum \mu(I_n) = \sum \varphi(I_n) = \varphi\big(\bigcup I_n\big) = \\ &= \varphi(V)\,.\end{aligned}$$

Le misure sui boreliani di $\mathbb{R}$ finite sui compatti sono anche regolari. Quindi se E è un boreliano di $\mathbb{R}$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \inf\big\{\mu(V) \;:\; V \text{ aperto} \subset E\big\} = \\ &= \inf\big\{\varphi(V) \;:\; V \text{ aperto} \subset E\big\} = \\ &= \varphi(E)\,.\end{aligned}$$

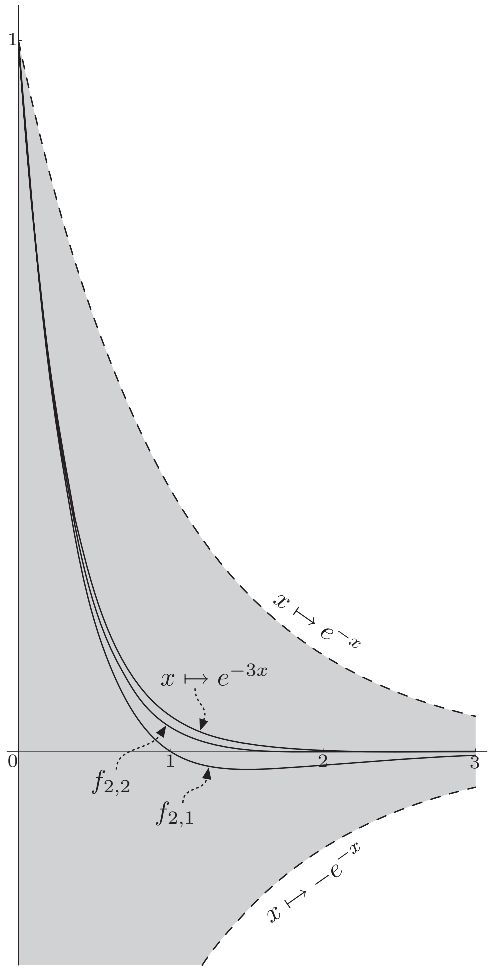
Questo dimostra l'uguaglianza fra μ e φ. Analogamente si dimostra l'uguaglianza fra le due misure $E \mapsto \mu(x+E)$ e $E \mapsto 2^x \mu(E)$ (la seconda è una misura in quanto prodotto di una misura per una costante positiva).

2. Poniamo, anche in vista degli esercizi successivi,

$$f_{\lambda,n}(x) := \Big(1-\frac{x}{n}\Big)^n e^{-\lambda x}\,.$$

Notiamo che la $f_{\lambda,n}$ cambia segno sull'intervallo di integrazione $[0,+\infty[$ quando n è dispari. Quindi non potremo usare, almeno direttamente, né il teorema della convergenza monotona né il lemma di Fatou. Resta da tentare la convergenza dominata. Usando le proprietà del valore assoluto e il fatto che per $x \ge 0$ la successione $n \mapsto (1+x/n)^n$ è crescente con limite e^x (oppure la disuguaglianza $\log(1+y) \le y$, valida per $y > -1$) possiamo scrivere, per $x \ge 0$ e $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$,

$$\big|f_{2,n}(x)\big| = \left|\Big(1-\frac{x}{n}\Big)^n e^{-2x}\right| \le \Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n e^{-2x} \le$$
$$\le e^{n\overbrace{\log(1+x/n)}^{\le x/n}} e^{-2x} \le e^x e^{-2x} = e^{-x}\,,$$



e inoltre

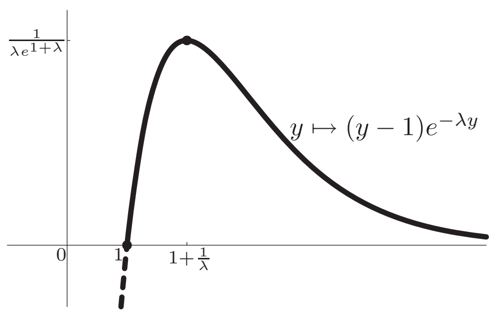
$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} f_{2,n}(x) &= \lim_{n\to+\infty}\Big(1-\frac{x}{n}\Big)^n e^{-2x} = \\ &= \lim_{n\to+\infty} e^{n\log(1-x/n)}e^{-2x} = \\ &= \lim_{n\to+\infty} e^{n(-x/n+o(1/n))}e^{-2x} = e^{-x}e^{-2x} = \\ &= e^{-3x} \qquad \forall x \ge 0\,.\end{aligned}$$

Dato che la funzione $x \mapsto e^{-x}$ è in $L^1([0,+\infty[)$, possiamo applicare il teorema della convergenza dominata e ricavare che

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_{2,n}(x)\,dx &= \int_0^{+\infty}\Big(\lim_{n\to+\infty} f_{2,n}(x)\Big)dx = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-3x}dx = \Big[\frac{e^{-3x}}{-3}\Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{3}\,.\end{aligned}$$

3. a. Per $y \to 1$ e per $y \to +\infty$ l'espressione $(y-1)e^{-\lambda y}$ va a zero. La derivata è

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}(y-1)e^{-\lambda y} &= e^{-\lambda y} + (y-1)\Big(-\lambda e^{-\lambda y}\Big) = \\ &= (1+\lambda-\lambda y)e^{-y/2}\begin{cases} >0 & \text{per } 1 \le y < 1+1/\lambda,\\ =0 & \text{per } y = 1+1/\lambda,\\ <0 & \text{per } y > 1+1/\lambda.\end{cases}\end{aligned}$$

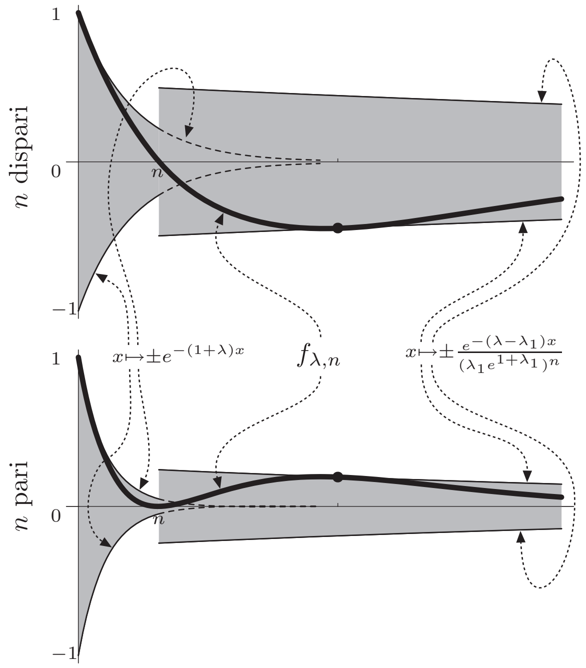


Dunque la funzione $y \mapsto (y-1)e^{-y/2}$ assume il suo massimo assoluto per $y = 1+1/\lambda$ con valore

$$\max_{y\ge 1}(y-1)e^{-\lambda y} = \Big(1+\frac{1}{\lambda}-1\Big)e^{-\lambda(1+1/\lambda)} = \frac{1}{\lambda e^{1+\lambda}}\,.$$

b. Per $x < n$ possiamo scrivere, similmente all'esercizio **2**,

$$0 \le f_{\lambda,n}(x) = \Big(1-\frac{x}{n}\Big)^n e^{-\lambda x} = e^{n\overbrace{\log(1-x/n)}^{\le -x/n}}e^{-2x} \le e^{-x}e^{-\lambda x} = e^{-(1+\lambda)x}\,.$$



Se invece $x \geq n$ si può procedere così, esprimendo in termini di $y = x/n$:

$$\begin{aligned}
f_{\lambda,n}(x) &= \Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^n e^{-\lambda x} = \\
&= (-1)^n \Big(\frac{x}{n} - 1\Big)^n e^{-\lambda x} = \\
&= (-1)^n \Big(\frac{x}{n} - 1\Big)^n e^{-\lambda_1 x} e^{-(\lambda-\lambda_1)x} = \\
&= (-1)^n \bigg(\underbrace{\Big(\frac{x}{n} - 1\Big) e^{-\lambda_1 (x/n)}}_{=(y-1)e^{-\lambda_1 y}}\bigg)^n e^{-(\lambda-\lambda_1)x} .
\end{aligned}$$

Prendendo il valore assoluto e maggiorando usando il punto precedente (con λ_1 al posto di λ)

$$|f_{\lambda,n}(x)| \leq \frac{e^{-(\lambda-\lambda_1)x}}{(\lambda_1 e^{1+\lambda_1})^n} \qquad \text{per } x \geq n.$$

La dominante $e^{-(1+\lambda)x}$ per $x \leq n$ non dipende da n, mentre invece quella per $x > n$ sì. Questa maggiorazione non si può usare direttamente per la convergenza dominata.

c. Notiamo che il metodo dell'esercizio **2** non si applica all'integrale di $f_{1/2,n}$, perché

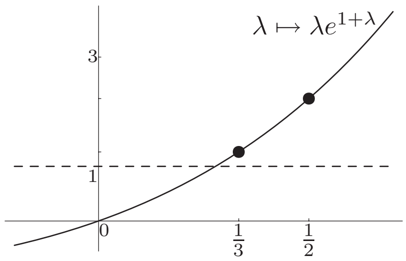
$$\big|f_{1/2,n}(x)\big| = \bigg|\Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^n e^{-x/2}\bigg| \leq \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n e^{-x/2} \leq e^x e^{-x/2} = e^{x/2} \qquad \forall x \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} ,$$

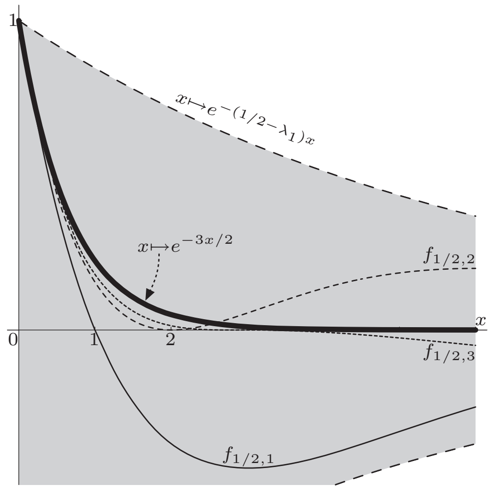
ma purtroppo la funzione dominante $x \mapsto e^{x/2}$ non è in $L^1([0, +\infty[)$. Usiamo quindi il punto **b**: poiché

$$\lim_{\lambda_1 \to 1/2} \lambda_1 e^{1+\lambda_1} = \frac{1}{2} e^{3/2} = \sqrt{\frac{e^3}{4}} > \sqrt{\frac{2^3}{4}} = \sqrt{2} > 1 ,$$

esiste un $\lambda_1 \in]0, 1/2[$ tale che $\lambda_1 e^{1+\lambda_1} > 1$. Per esempio possiamo prendere $\lambda_1 = 1/3$, dato che $(1/3)e^{1+1/3} = e^{4/3}/3 = \sqrt[3]{e^4/27} > \sqrt[3]{(2+1/2)^4/27} = \sqrt[3]{625/432} > 1$. Fissato un tale λ_1 abbiamo che

$$|f_{1/2,n}(x)| \leq \frac{e^{-(1/2-\lambda_1)x}}{(\lambda_1 e^{1+\lambda_1})^n} \leq e^{-(1/2-\lambda_1)x} \qquad \text{per } x \geq n.$$





Dunque per ogni $x \geq 0$ ed $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
|f_{1/2,n}| &\leq \begin{cases} e^{-(\lambda+1)x} = e^{-3x/2} & \text{se } 0 \leq x < n, \\ e^{-(1/2-\lambda_1)x} & \text{se } x \geq n, \end{cases} \\
&\leq \max\big\{e^{-3x/2}, e^{-(1/2-\lambda_1)x}\big\} = e^{-(1/2-\lambda_1)x} .
\end{aligned}$$

Essendo $1/2 - \lambda_1 > 0$, la funzione dominante $x \mapsto e^{-(1/2-\lambda_1)x}$ è in $L^1([0, +\infty[)$, e possiamo applicare il teorema della convergenza dominata:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_{1/2,n}(x)\, dx &= \int_0^{+\infty} \Big(\lim_{n\to+\infty} f_{1/2,n}(x)\Big) dx = \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-x/2} dx = \\
&= \Big[\frac{e^{-3x/2}}{-3/2}\Big]_0^{+\infty} = \frac{2}{3} .
\end{aligned}$$

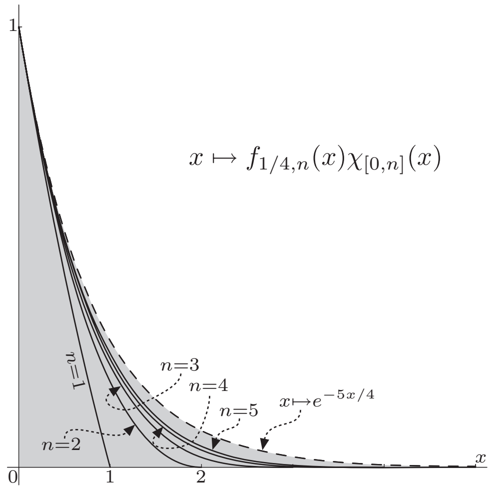
d. Il metodo del punto precedente fallisce quando $\lambda = 1/4$, perché in tal caso $\lambda e^{1+\lambda} = e^{5/4}/4 = (e^5/4^4)^{1/4} < (3^5/4^4)^{1/4} = (243/256)^{1/4} < 1$ e quindi per qualunque $\lambda_1 \in]0, \lambda[$ si ha

$$\sup_{n\geq 0} \frac{e^{-(\lambda-\lambda_1)x}}{(\lambda_1 e^{1+\lambda_1})^n} = +\infty .$$

Spezziamo l'integrale di partenza nella somma degli integrali su $[0, n]$ e $]n, +\infty[$:

$$\int_0^{+\infty} f_{1/4,n}(x)\, dx = \int_0^n f_{1/4,n}(x)\, dx + \\ + \int_n^{+\infty} f_{1/4,n}(x)\, dx .$$

n	$\int f_{2,n}$	$\int f_{1/2,n}$	$\int f_{1/4,n}$
1	0.25	−2	−12
2	0.3125	2	20
3	0.319444	−0.222222	−26.2222
4	0.323242	1	36
5	0.3254	0.4064	−44.3584
6	0.326799	0.716049	57.1358
7	0.327778	0.577293	−68.9657
8	0.328503	0.652344	86
9	0.32906	0.623214	−102.773
10	0.329502	0.642135	125.686



Riportiamo l'integrale su $[0, n]$ all'intervallo fisso $[0, +\infty[$ introducendo la funzione caratteristica:

$$\int_0^n f_{1/4,n}(x)\, dx = \int_0^{+\infty} f_{1/4,n}(x)\chi_{[0,n]}(x)\, dx .$$

La nuova funzione integranda si maggiora come nei punti precedenti:

$$\bigl|f_{1/4,n}(x)\chi_{[0,n]}(x)\bigr| \leq \begin{cases} e^{-(1+\lambda)x} & \text{se } x \leq n, \\ 0 & \text{se } x > n \end{cases} \\ \leq e^{-(1+\lambda)x} = e^{-5x/4} \quad \text{per ogni } x \geq 0 .$$

Quindi possiamo passare al limite per convergenza dominata; la funzione caratteristica $\chi_{[0,n]}(x)$ scompare perché è uguale a 1 per $n > x$, cioè definitivamente in n:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n f_{1/2,n}(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_{1/2,n}(x)\chi_{[0,n]}(x)\, dx = \\ = \int_0^{+\infty} \Bigl(\lim_{n\to+\infty} f_{1/2,n}(x)\chi_{[0,n]}(x)\Bigr) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-x/4} dx = \Bigl[\frac{e^{-5x/4}}{-5/4}\Bigr]_0^{+\infty} = \frac{4}{5} .$$

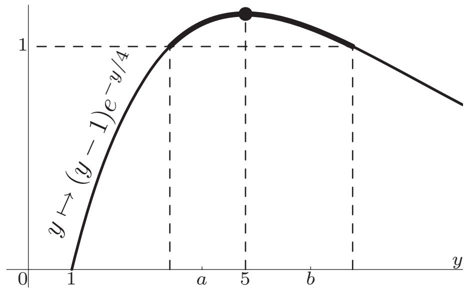
Il passaggio al limite sotto il segno di integrale si potrebbe anche giustificare per la convergenza monotona; infatti si può verificare che la successione $n \mapsto f_{1/4,n}(x)\chi_{[0,n]}(x)$ è ≥ 0 e debolmente crescente per ogni $x \geq 0$. Rimane ancora da studiare l'integrale su $[n, +\infty[$. Facciamo il cambio di variabile lineare $x/n = y$, che oltre tutto riporta all'intervallo d'integrazione fisso $[1, +\infty[$:

$$\int_n^{+\infty} f_{1/4,n}(x)\, dx = \int_n^{+\infty} \Bigl(1 - \frac{x}{n}\Bigr)^n e^{-x/4} dx = \int_1^{+\infty} (1-y)^n e^{-ny/4} n\, dy = \\ = (-1)^n \int_1^{+\infty} n(y-1)^n e^{-ny/4}\, dy = (-1)^n \int_1^{+\infty} \underbrace{n\bigl((y-1)e^{-y/4}\bigr)^n}_{=:h_n(y)} dy .$$

Concentriamoci sull'integrale $\int_1^{+\infty} h_n(y)dy$, la cui funzione integranda è positiva. Dal punto **a** sappiamo che

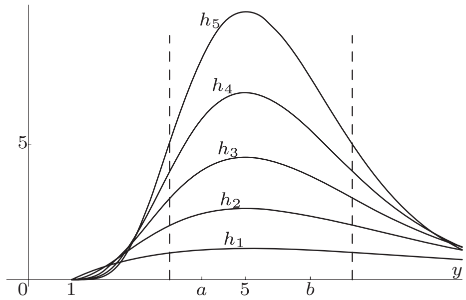
$$\max_{y\geq 1}(y-1)e^{-y/4} = \frac{1}{\lambda e^{1+\lambda}} = \frac{1}{e^{5/4}/4} = \sqrt[4]{\frac{4^4}{e^5}} > \sqrt[4]{\frac{4^4}{3^5}} = \sqrt[4]{\frac{256}{243}} > 1 .$$

Per la continuità della funzione $y \to (y-1)e^{-y/4}$, esistono a, b con $1 \le a < b$ tali che $(y-1)e^{-y/4} > 1$ per ogni $y \in [a, b]$. Minoriamo l'integrale su $[1, +\infty[$ con quello su $[a, b]$:



$$\int_1^{+\infty} h_n(y)\,dy \ge \int_a^b h_n(y)\,dy\,.$$

Usiamo il lemma di Fatou:



$$\begin{aligned}
\min\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} h_n(y)\,dy &\ge \min\lim_{n\to+\infty} \int_a^b h_n(y)\,dy \ge \\
&\ge \int_a^b \left(\min\lim_{n\to+\infty} h_n(y) \right) dy = \\
&= \int_a^b \left(\min\lim_{n\to+\infty} n \big(\underbrace{(y-1)e^{-y/4}}_{>1} \big)^n \right) dy = \\
&= \int_a^b (+\infty) dy = +\infty\,.
\end{aligned}$$

(Su $[a, b]$ si può usare anche la convergenza monotona). Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} n\big((y-1)e^{-y/4}\big)^n dy = +\infty\,,$$

e di conseguenza la successione di partenza

$$n \mapsto \int_0^{+\infty} f_{1/4,n}(x)\,dx = \underbrace{\int_0^n f_{1/4,n}(x)\,dx}_{\to 4/5} + (-1)^n \underbrace{\int_1^{+\infty} n\big((y-1)e^{-y/4}\big)^n dy}_{\to+\infty}$$

non ha limite; più precisamente, tende a $+\infty$ sugli n pari, e a $-\infty$ sugli n dispari. Abbiamo dunque un esempio in cui non vale il passaggio al limite sotto il segno di integrale:

$$\underbrace{\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_{1/4,n}(x)\,dx}_{\text{non esiste}} \ne \underbrace{\int_0^{+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} f_{1/4,n}(x) \right) dx}_{=4/5}$$

(non soltanto non sussistono le ipotesi, ma neanche la tesi).
I ragionamenti fatti nei casi $\lambda = 1/2$ e $\lambda = 1/4$ si generalizzano a $\lambda > 0$ generico. Provate a dimostrare che esiste uno e un solo $\lambda_0 \in\,]1/4, 1/2[$ tale che $\lambda_0 e^{1+\lambda_0} = 1$ e inoltre

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_{\lambda,n}(x)\,dx \begin{cases} = 1/(\lambda+1) & \text{se } \lambda > \lambda_0, \\ \text{non esiste} & \text{se } 0 < \lambda < \lambda_0. \end{cases}$$

Cosa succede nel caso critico $\lambda = \lambda_0$?
L'integrale

$$\int_0^{+\infty} f_{1/4,n}(x)\,dx$$

risulta un numero *intero* quando $n = 2^k$ con $k = 0, 1, 2, 3$. Che sia così per tutti i $k \in \mathbb{N}$?