Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2001/02

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta del 3 dicembre 2001

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Sia X un insieme più che numerabile, e sia $\mathcal{M}$ la σ-algebra generata dalla famiglia dei sottinsiemi di X equipotenti a $\mathbb{N}$.

a. Dimostrare che $\mathcal{M}$ coincide con la famiglia dei sottinsiemi di X tali che o loro o il loro complemento è *al più* numerabile.

b. Dato $E \in \mathcal{M}$ poniamo $\mu(E) = 0$ se E è al più numerabile, e $\mu(E) = 1$ se $X \setminus E$ è al più numerabile. Dimostrare che μ è una misura su $\mathcal{M}$ e che lo spazio di misura $(X, \mathcal{M}, \mu)$ è completo.

c. Dimostrare che una $f : X \to \mathbb{R}$ è $\mathcal{M}$-misurabile se e solo se è μ-quasi ovunque costante.

(Se f è misurabile e $\{A_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ è una partizione di $\mathbb{R}$ in insiemi boreliani, per tutti gli n escluso uno la contrimmagine $f^{-1}(A_n)$ è al più numerabile; scegliere partizioni opportune).

2. a. Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \int_0^4 \frac{t-1}{(t+n)^2}\,dt = 4\,.$$

(Un modo è di portare n^2 dentro l'integrale e maggiorare).

b. Mostrare che per ogni $n \geq 1$, $x \geq 0$,

$$\frac{\partial}{\partial n} \log\Bigl(1 + \frac{x}{n}\Bigr)^{n+1} = -\int_0^x \frac{t-1}{(t+n)^2}\,dt\,.$$

c. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\Bigl(1+\dfrac{x}{n}\Bigr)^{n+1}}\,dx\,.$$

(Per $x \leq 4$ l'integrando si maggiora con una costante; per $x > 4$ i risultati dei punti precedenti aiutano a studiare l'integrando come funzione di n).

Punti: 10+10+10, 5+5+20.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta del 3 dicembre 2001

Svolgimento

1. a. Sia $\mathcal{N}$ la famiglia dei sottinsiemi di X equipotenti a $\mathbb{N}$, $\mathcal{M}$ la σ-algebra generata da $\mathcal{N}$ (in particolare $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, e sia $\mathcal{F}$ la famiglia dei sottinsiemi E di X tali che (1) E è al più numerabile (*primo tipo*), oppure (2) il complementare di E è al più numerabile (*secondo tipo*). Ci proponiamo di dimostrare che $\mathcal{F} = \mathcal{M}$. Cominciamo col notare che poiché X è più che numerabile, un insieme di $\mathcal{F}$ è di solo uno dei due tipi. Inoltre, poiché gli insiemi equipotenti a $\mathbb{N}$ sono (al più) numerabili, abbiamo banalmente che $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}$.
Dimostriamo che $\mathcal{F}$ è una σ-algebra. **Lo spazio X appartiene a $\mathcal{F}$**: infatti X è del secondo tipo, in quanto ha come complementare l'insieme vuoto, che è al più numerabile. **Stabilità per complementi:** se $E \subset X$, chiaramente E è di un tipo se e solo se il suo complementare $X \setminus E$ è dell'altro tipo. Quindi $E \in \mathcal{F} \iff X \setminus E \in \mathcal{F}$. **Stabilità per unioni numerabili:** supponiamo che $E_n \in \mathcal{F}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dimostriamo che $E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{F}$. Primo caso: tutti gli E_n sono del primo tipo. Allora l'unione degli E_n è pure al più numerabile, e quindi è del primo tipo e appartiene a $\mathcal{F}$. Secondo caso: E_{n_0} è del secondo tipo per almeno un $n_0 \in \mathbb{N}$. Allora $X \setminus E = X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(X \setminus E_n) \subset X \setminus E_{n_0}$. Ne segue che $X \setminus E$ è al più numerabile perché sottinsieme di $X \setminus E_0$, che è al più numerabile. Anche in questo caso $E \in \mathcal{F}$.
Essendo $\mathcal{F}$ una σ-algebra contenente $\mathcal{N}$, $\mathcal{F}$ contiene la più piccola σ-algebra contenente $\mathcal{N}$, cioè $\mathcal{F} \supset \mathcal{M}$. Rimane da dimostrare l'inclusione opposta $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$. Sia quindi $E \in \mathcal{F}$ e dimostriamo che $E \in \mathcal{M}$. Sia E del primo tipo. Se E è esattamente numerabile allora $E \in \mathcal{N} \subset \mathcal{M}$. Se invece E è finito allora $X \setminus E$ è infinito, e quindi contiene almeno un sottinsieme esattamente numerabile, che chiamiamo A. Notiamo che E ed A sono disgiunti. Sia A che $E \cup A$ sono esattamente numerabili, e quindi appartengono ad $\mathcal{N}$. Essendo $\mathcal{M}$ una σ-algebra contenente $\mathcal{N}$, la differenza $E = (E \cup A) \setminus A$ appartiene ancora ad $\mathcal{M}$, in quanto differenza di due elementi di $\mathcal{M}$. Se invece $E \in \mathcal{F}$ è del secondo tipo, allora $X \setminus E$ è del primo tipo, e quindi $X \setminus E \in \mathcal{M}$ per quanto appena dimostrato, e infine $E \in \mathcal{M}$ in quanto complementare di un elemento di $\mathcal{M}$.

b. Notiamo che μ è ben definita, perché un insieme non può essere del primo e del secondo tipo allo stesso tempo. Dobbiamo dimostrare che μ è una misura positiva. La μ ha sempre valori finiti, per definizione. Per dimostrare l'additività numerabile, siano $E_n \in \mathcal{M}$ a due a due disgiunti, poniamo $E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, e dimostriamo che

$$\mu(E) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)\,.$$

Primo caso: tutti gli E_n sono del primo tipo. Allora anche E è del primo tipo, e quindi

$$\mu(E) = 0\,, \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 0 = 0\,,$$

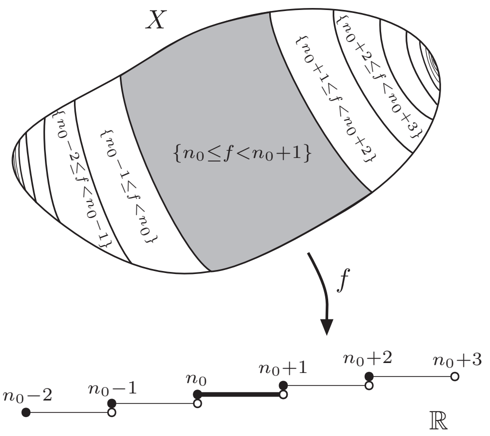
e vale l'uguaglianza.
Secondo caso: esiste almeno un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che E_{n_0} è del secondo tipo, cioè $X \setminus E_0$ è al più numerabile. Poiché $X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(X \setminus E_n) \subset X \setminus E_{n_0}$, abbiamo che $\mu(E) = 1$. D'altra parte, poiché gli E_n sono a due a due disgiunti, abbiamo che $E_n \subset X \setminus E_{n_0}$ per $n \neq n_0$, e quindi E_n è del primo tipo per ogni $n \neq n_0$. Pertanto

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) = \mu(E_{n_0}) + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{n_0\}} \mu(E_n) = \sum_{n\in\{n_0\}} 1 + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{n_0\}} 0 = 1 + 0 = 1\,.$$

Anche in questo caso vale l'additività numerabile.
Verifichiamo che lo spazio di misura $(X, \mathcal{M}, \mu)$ è completo. Siano $E \subset F \subset X$ tali che $F \in \mathcal{M}$ e $\mu(F) = 0$. Dobbiamo dimostrare che $E \in \mathcal{M}$. Ma $\mu(F) = 0$ vuol dire che F è al più numerabile. Quindi anche E è al più numerabile, in quanto sottinsieme di F. Deduciamo che $E \in \mathcal{M}$, come desiderato.

c. Supponiamo che $f\colon X \to \mathbb{R}$ sia $\mathcal{M}$-misurabile. In particolare, $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$ per ogni A boreliano di $\mathbb{R}$. Prendiamo la successione di boreliani $[n, n+1[$, al variare di $n \in \mathbb{Z}$. Abbiamo che

$$\begin{aligned} X = f^{-1}(\mathbb{R}) = f^{-1}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1[\Big) &= \\ = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^{-1}\big([n, n+1[\big) &= \\ = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{n \le f < n+1\}\,. \end{aligned}$$



Le contrimmagini $\{n \le f < n+1\}$ sono in $\mathcal{M}$ perché contrimmagini di boreliani tramite una funzione $\mathcal{M}$-misurabile. Inoltre sono a due a due disgiunte perché gli intervalli lo sono. Essendo la loro unione X, che è più che numerabile, almeno una delle contrimmagini, sia essa $\{n_0 \le f < n_0+1\}$, dev'essere del secondo tipo. In realtà questa è l'unica del secondo tipo, in quanto tutte le altre contrimmagini, essendo disgiunte da $\{n_0 \le f < n_0+1\}$, sono contenute nell'insieme al più numerabile $X \setminus \{n_0 \le f < n_0+1\}$. Pertanto $n_0 \le f < n_0+1$ μ-quasi ovunque.
E ora bisechiamo. Dimostriamo per induzione che esiste una successione di intervalli semiaperti (chiusi a sinistra e aperti a destra) I_k decrescente ($I_k \supset I_{k+1}$), tale che la lunghezza di I_k sia $1/2^k$, e tale che $\{f \in I_k\}$ sia del secondo tipo per ogni k. Per $k=0$ basta porre $I_0 = [n_0, n_0+1[$. Supponiamo di avere definito $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_{k+0}$ tali che I_k sia di lunghezza $1/2^k$ e che $\{f \in I_k\}$ sia del secondo tipo per ogni $k \le k_0$. Dividiamo l'intervallo $I_{k_0} = [a, b[$ in due sottointervalli J_1, J_2 tramite il punto medio:

$$I_{k_0} = \underbrace{\Big[a, \frac{a+b}{2}\Big[}_{=:J_1} \cup \underbrace{\Big[\frac{a+b}{2}, b\Big[}_{=:J_2}\,.$$

I due insiemi $\{f \in J_1\}$ e $\{f \in J_2\}$ sono sottinsiemi di X disgiunti e la cui unione è il sottinsieme del secondo tipo $\{f \in I_{k_0}\}$. Quindi uno e uno solo di loro è un insieme del secondo tipo. Chiamiamolo I_{k_0+1}. È chiaro che $I_{k_0} \supset I_{k_0+1}$, che I_{k_0+1} ha lunghezza $1/2^{k_0+1}$ e che $\{f \in I_{k_0+1}\}$ è del secondo tipo.
La successione di intervalli I_k ha uno e un solo punto in comune, che chiamiamo x_0. Dimostriamo che $f = x_0$ μ-quasi ovunque. Poiché $x_0 \in I_k$ e I_k ha lunghezza $1/2^k$, per $y \in \mathbb{R}$ possiamo dire che

$$|y - x_0| > \frac{1}{2^k} \quad \Rightarrow \quad y \notin I_k\,.$$

Quindi

$$\{f \ne x_0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Big\{|f - x_0| > \frac{1}{2^k}\Big\} \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{f \notin I_k\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X \setminus \{f \in I_k\}\,.$$

L'insieme $\{f \ne x_0\}$ dev'essere μ-trascurabile, in quanto sottinsieme di un'unione numerabile di insiemi al più numerabili. Concludiamo che f ha per valore la costante $x_0 \in \mathbb{R}$ μ-quasi ovunque.
Viceversa, sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione μ-quasi ovunque costante, cioè tale che esista una costante $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $\{f \ne x_0\}$ sia μ-trascurabile. Dimostriamo che f è $\mathcal{M}$-misurabile. Questo significa che per ogni aperto $V \subset \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}(V)$ appartiene a $\mathcal{M}$. Sia pertanto V aperto in $\mathbb{R}$. Distinguiamo due casi. Se $x_0 \notin V$, allora $f^{-1}(V) = \{f \in V\} \subset \{f \ne x_0\}$, e quindi $f^{-1}(V)$ appartiene a $\mathcal{M}$ in quanto sottinsieme dell'insieme al più numerabile $\{f \ne x_0\}$. Se invece $x_0 \in V$, allora

$$X \setminus f^{-1}(V) = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus V) = \{f \notin V\} \subset \{f \ne x_0\}\,,$$

e quindi $f^{-1}(V)$ è $\mathcal{M}$-misurabile (del secondo tipo), in quanto il suo complementare è sottinsieme dell'insieme al più numerabile $\{f \ne x_0\}$.

2. a. L'integrale

$$\int_0^4 \frac{t-1}{(t+n)^2}dt$$

ha senso anche secondo Riemann, in quanto la funzione integranda è continua sull'intervallo chiuso e limitato $[0,4]$. Il limite

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \int_0^4 \frac{t-1}{(t+n)^2}dt = 4$$

si può calcolare in diversi modi. Portiamo n^2 dentro l'integrale e poniamo

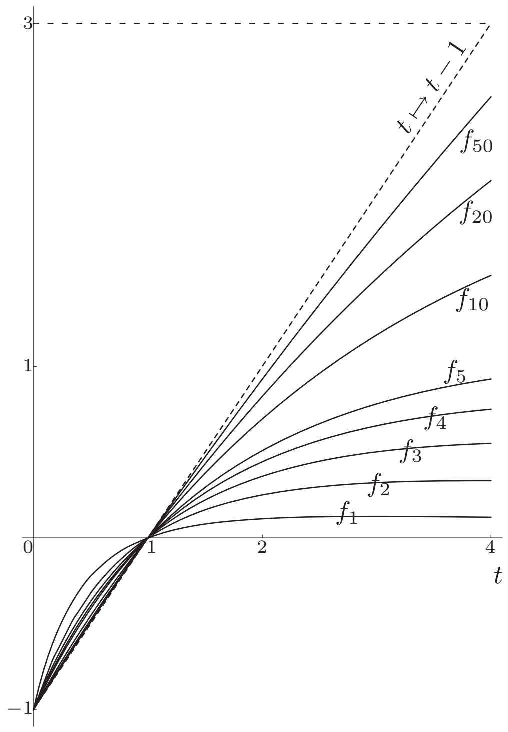
$$f_n(t) := \frac{n^2(t-1)}{(t+n)^2}\,.$$

La convergenza puntuale di f_n è facile:

$$f_n(t) \to t-1 \qquad \text{per } n\to+\infty\,.$$

La funzione f_n non è sempre positiva nell'intervallo $[0,4]$, per cui non si può usare il teorema della convergenza monotona. Proviamo con la convergenza dominata. Maggioriamo banalmente:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}|f_n(t)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2|t-1|}{(t+n)^2} \le$$
$$\le \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2\cdot|t-1|}{(0+n)^2} = |t-1| \le 3\,.$$



Poiché la costante 3 (o anche la funzione $t\mapsto|t-1|$) è in $L^1(0,4)$, la convergenza puntuale è dominata:

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \int_0^4 \frac{t-1}{(t+n)^2}dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^4 \frac{n^2(t-1)}{(t+n)^2}dt = \int_0^4 \left(\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2(t-1)}{(t+n)^2}\right)dt =$$
$$= \int_0^4 (t-1)dt = \left[\frac{t^2}{2}-t\right]_0^4 = \frac{16}{2}-5 = 4\,.$$

Un altro approccio al problema è di vedere se per caso la convergenza $f_n(t)\to t-1$ è uniforme su $[0,4]$:

$$\bigl|f_n(t)-(t-1)\bigr| = \left|\frac{n^2(t-1)}{(t+n)^2}-(t-1)\right| = \left|(t-1)\frac{n^2-(t+n)^2}{(t+n)^2}\right| =$$
$$= \left|(t-1)\frac{n^2-t^2-n^2-2nt}{(t+n)^2}\right| = \left|(t-1)\frac{-t^2-2nt}{(t+n)^2}\right| \le$$
$$\le 3\cdot\frac{4^2+2n\cdot 4}{(0+n)^2} = \frac{24n+48}{n^2} \qquad \forall t\in[0,4]\,.$$

Poiché

$$\sup_{0\le t\le 4}\bigl|f_n(t)-(t-1)\bigr| \le \frac{24n+48}{n^2} \to 0 \qquad \text{per } n\to+\infty\,,$$

effettivamente la convergenza è uniforme, e gli integrali convergono per le proprietà elementari dell'integrale di Riemann.
Altro modo ancora per calcolare il limite è di notare che l'integrale è calcolabile elementarmente:

$$\int\frac{t-1}{(t+n)^2}dt = \int\frac{t+n}{(t+n)^2}dt - \int\frac{n+1}{(t+n)^2}dt = \int\frac{1}{t+n}dt - (n+1)\int(t+n)^{-2}dt =$$
$$= \log(t+n) + (n+1)(t+n)^{-1} = \log(t+n) + \frac{n+1}{t+n}\,.$$

Quindi

$$n^2\int_0^4 \frac{t-1}{(t+n)^2}dt = n^2\Big(\log(4+n)+\frac{n+1}{4+n}-\log(0+n)-\frac{n+1}{0+n}\Big) = n^2\Big(\log\frac{4+n}{n}-\frac{4(n+1)}{n(4+n)}\Big).$$

Quest'ultima espressione è nella forma indeterminata $\infty\cdot 0$ per $n\to+\infty$. Per calcolare il limite possiamo ad esempio usare la formula di Taylor $\log(1+x)=x-x^2/2+o(x^2)$ per $x\to 0$:

$$\begin{aligned} n^2\Big(\log\frac{4+n}{n}-\frac{4(n+1)}{n(4+n)}\Big) &= n^2\Big(\log\Big(1+\frac{4}{n}\Big)-\frac{4(n+1)}{n(4+n)}\Big) = n^2\Big(\frac{4}{n}-\frac{16}{2n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)-\frac{4(n+1)}{n(4+n)}\Big) = \\ &= n^2\Big(\frac{4\big(n(4+n)-2(4+n)-n(n+1)\big)}{n^2(4+n)}+o(1/n^2)\Big) = \frac{4(n-8)}{4+n}+o(1) = \\ &= 4+o(1) \text{ per } n\to+\infty\,. \end{aligned}$$

b. Per dimostrare che per ogni $n\ge 1$, $x\ge 0$ si ha

$$\frac{\partial}{\partial n}\log\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^{n+1} = \int_0^x \frac{t-1}{(t+n)^2}dt$$

sviluppiamo dapprima il membro di sinistra:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n}\log\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^{n+1} &= \frac{\partial}{\partial n}(n+1)\log\Big(1+\frac{x}{n}\Big) = \log\Big(1+\frac{x}{n}\Big)+(n+1)\frac{1}{1+\frac{x}{n}}\Big(-\frac{x}{n^2}\Big) = \\ &= \log\Big(1+\frac{x}{n}\Big)-\frac{x(n+1)}{n(n+x)}\,. \end{aligned}$$

L'integrale al secondo membro è calcolabile elementarmente, e si può verificare che il suo valore coincide con il primo membro. Tuttavia, poiché di solito le derivate sono più facili da calcolare degli integrali, ci basterà verificare che i due membri sono uguali per $x=0$ e che hanno la stessa derivata rispetto a x per $x\ge 0$. Per $x=0$ evidentemente i due membri sono nulli. La derivata del primo membro rispetto a x è

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\Big(\log\Big(1+\frac{x}{n}\Big)-\frac{x(n+1)}{n(n+x)}\Big) &= \frac{1}{1+\frac{x}{n}}\cdot\frac{1}{n}-\frac{(n+1)\cdot n(n+x)-x(n+1)\cdot n}{\big(n(n+x)\big)^2} = \\ &= \frac{1}{n+x}-\frac{(n+1)(n^2+nx-nx)}{\big(n(n+x)\big)^2} = \\ &= \frac{n^2(n+x)-n^2(n+1)}{\big(n(n+x)\big)^2} = \frac{x-1}{(n+x)^2}\,. \end{aligned}$$

La derivata del secondo membro si trova con il teorema fondamentale del calcolo:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x\frac{t-1}{(t+n)^2}dt = \frac{x-1}{(x+n)^2}\,.$$

Dunque le derivate rispetto a x dei due membri sono davvero identiche.

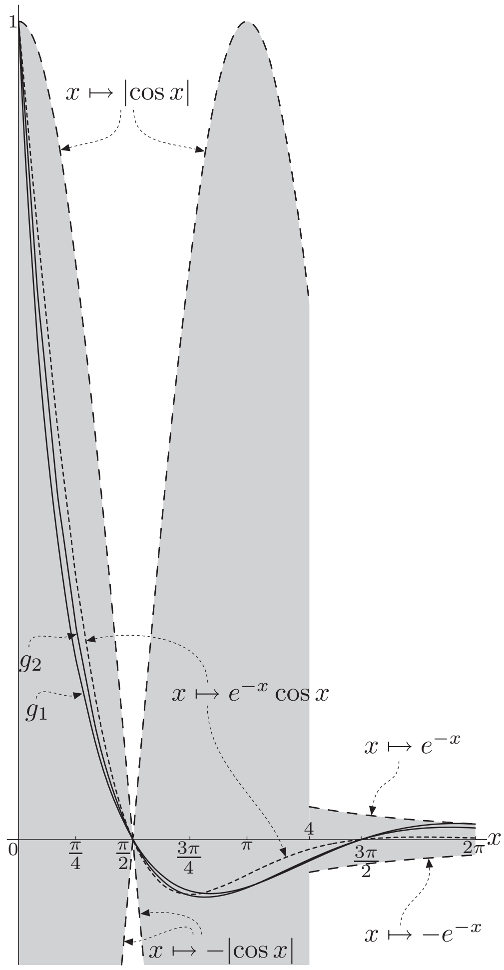
c. Poniamo

$$g_n(x) := \frac{\cos x}{\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^{n+1}}\,.$$

Il limite di $g_n(x)$ per $n\to+\infty$ si può trovare per esempio passando agli esponenziali e usando la formula di Taylor $\log(1+y)=y+o(y)$ per $y\to 0$:

$$\begin{aligned} g_n(x) &= (\cos x)\exp\Big(-\log\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^{n+1}\Big) = (\cos x)\exp\Big(-(n+1)\log\Big(1+\underbrace{\frac{x}{n}}_{\to 0}\Big)\Big) = \\ &= (\cos x)\exp\Big(-(n+1)\Big(\frac{x}{n}+o(x/n)\Big)\Big) = (\cos x)\exp\Big(-\frac{x(n+1)}{n}+o(1)\Big) \longrightarrow (\cos x)\exp(-x) \end{aligned}$$

per $n\to+\infty$.



L'integrale del limite ha senso perché $x \mapsto e^{-x}\cos x$ è chiaramente in $L^1(\mathbb{R}^+)$, ed è presto calcolato:

$$\int_0^{+\infty}\Big(\lim_{n\to+\infty} g_n(x)\Big)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\big[e^{-x}(\operatorname{sen} x - \cos x)\big]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\,.$$

Dobbiamo vedere se si può passare al limite sotto il segno di integrale. L'integranda è a segno variabile, e vale l'ovvia maggiorazione

$$|g_n(x)| \le \frac{1}{\Big(1+\dfrac{x}{n}\Big)^{n+1}} =: h_n(x)\,.$$

Studiamo la dominante $h_n(x)$ come funzione di n, per calcolare o stimare l'estremo superiore rispetto a n, in vista di applicare la convergenza dominata. Deriviamo rispetto a n:

$$\frac{\partial h_n(x)}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n}\exp\Big(-\log\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^{n+1}\Big) =$$
$$= -\Big(\frac{\partial}{\partial n}\log\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^{n+1}\Big)\exp\Big(-\log\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^{n+1}\Big) =$$
$$= -\Big(\int_0^x \frac{t-1}{(t+n)^2}dt\Big)\cdot \underbrace{\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^{-n-1}}_{>0}\,.$$

Per $x \ge 4$ possiamo stabilire il segno di quest'espressione usando il punto precedente:

$$\int_0^x \frac{t-1}{(t+n)^2}dt = \int_0^4 \frac{t-1}{(t+n)^2}dt + \int_4^x \frac{t-1}{(t+n)^2}dt =$$

$$= \frac{1}{n^2}\cdot n^2\int_0^4 \frac{t-1}{(t+n)^2}dt + \int_4^x \overbrace{\frac{t-1}{(t+n)^2}}^{>0 \text{ per } t\ge 4}dt \ge \frac{1}{n^2}\cdot \underbrace{n^2\int_0^4 \frac{t-1}{(t+n)^2}dt}_{\to 4>0}\,.$$

L'ultimo membro della catena di disuguaglianze precedente non dipende da x (sempre quando $x \ge 4$) ed è > 0 per n grande. Quindi esiste un $n_0 \ge 1$ tale che

$$\frac{\partial h_n(x)}{\partial n} < 0 \qquad \text{per ogni } x \ge 4 \text{ e per ogni } n \ge n_0.$$

La successione $n \mapsto h_n(x)$ viene decrescente sugli $n \ge n_0$ per ogni fissato $x \ge 4$. Pertanto

$$\sup_{n\ge n_0}\big|g_n(x)\big| = h_{n_0}(x) \quad \text{per } x \ge 4\,.$$

Per $0 \le x \le 4$ la monotonia o meno di $n \mapsto h_n(x)$ non è chiara, ma possiamo ignorarla maggiorando brutalmente $|g_n(x)|$ con $|\cos x|$ (o con la costante 1):

$$\big|g_n(x)\big| = \frac{|\cos x|}{\Big(1+\dfrac{x}{n}\Big)^{n+1}} \le |\cos x| \le 1 \quad \text{per } x \ge 0\,.$$

n	$\int_0^\infty g_n \approx$
1	0 ,37855
2	0 ,421819
3	0 ,441429
4	0 ,452935
5	0 ,460576
6	0 ,466046
7	0 ,470164
8	0 ,473382
9	0 ,475967
10	0 ,478091

Mettendo insieme:

$$\sup_{n\geq n_0}\left|g_n(x)\right| \leq \begin{cases} |\cos x| & \text{se } 0\leq x<4,\\[2mm] h_{n_0}(x)=\dfrac{1}{\bigl(1+\frac{x}{n_0}\bigr)^{n_0+1}} & \text{se } x\geq 4.\end{cases}$$

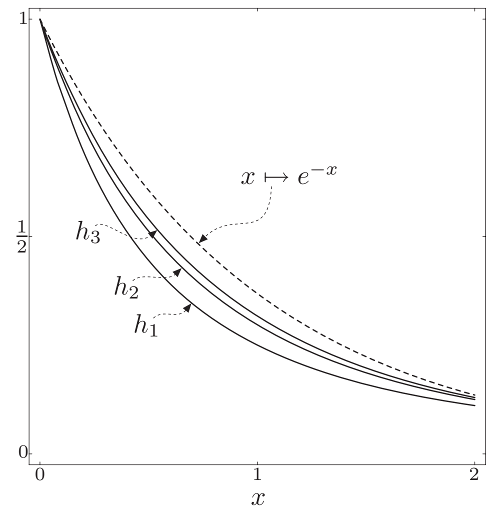
La funzione definita a tratti al secondo membro è in $L^1([0,+\infty[)$ perché è limitata e va come $1/x^{n_0+1}$ per $x\to+\infty$, con $n_0\geq 1$. Dunque si può applicare il teorema della convergenza dominata e passare al limite sotto il segno di integrale.

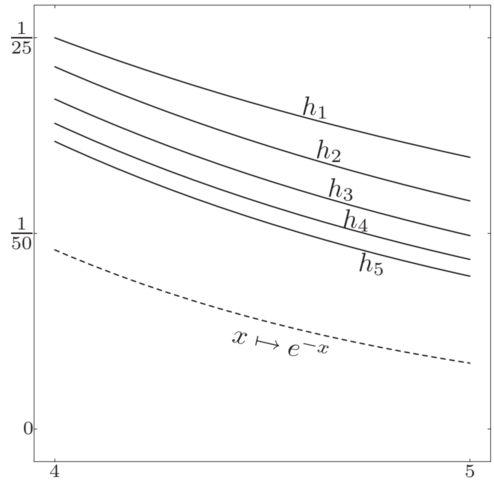
Approfondimento sulla monotonia di $n\mapsto h_n(x)$. La difficoltà in questo tipo di conti è che le disuguaglianze da dimostrare riguardano un misto di funzioni razionali e logaritmi. Per fortuna derivando ci si può sbarazzare del logaritmo. Con un po' di abilità ci si riporta a studiare il segno di funzioni razionali. Per esempio, quando $x\geq 0$, $n\geq 1$ si arriva all'identità

$$\int_0^x \frac{t-1}{(t+n)^2}\,dt = -\int_n^{+\infty}\frac{x(m(2-x)+x)}{m^2(m+x)^2}\,dm\,,$$

che si può verificare a posteriori per esempio derivando rispetto ad n. Prima applicazione: sostituendo in una formula vista prima si ha che

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_n(x)}{\partial n} &= -\left(\int_0^x \frac{t-1}{(t+n)^2}\,dt\right)\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n-1} =\\ &= \left(\int_n^{+\infty}\frac{x(m(2-x)+x)}{m^2(m+x)^2}\,dm\right)\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n-1}.\end{aligned}$$





Poiché l'integrando al secondo membro è certamente positivo se $0\leq x\leq 2$ e $n\geq 1$, deduciamo che *la successione $n\mapsto h_n(x)$ è crescente quando $0\leq x\leq 2$*. Seconda applicazione: con $x=4$ la formula diventa

$$\int_0^4 \frac{t-1}{(t+n)^2}\,dt = \int_n^{+\infty}\frac{8(m-2)}{m^2(4+m)^2}\,dm\,,$$

che è positiva per $n\geq 2$. Dato che per $x\geq 4$ e $n\geq 2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_n(x)}{\partial n} &= -\left(\int_0^x \frac{t-1}{(t+n)^2}\,dt\right)\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n-1} \leq\\ &\leq -\left(\int_0^4 \frac{t-1}{(t+n)^2}\,dt\right)\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n-1} =\\ &= -\left(\int_n^{+\infty}\frac{8(m-2)}{m^2(4+m)^2}\,dm\right)\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n-1} < 0\,,\end{aligned}$$

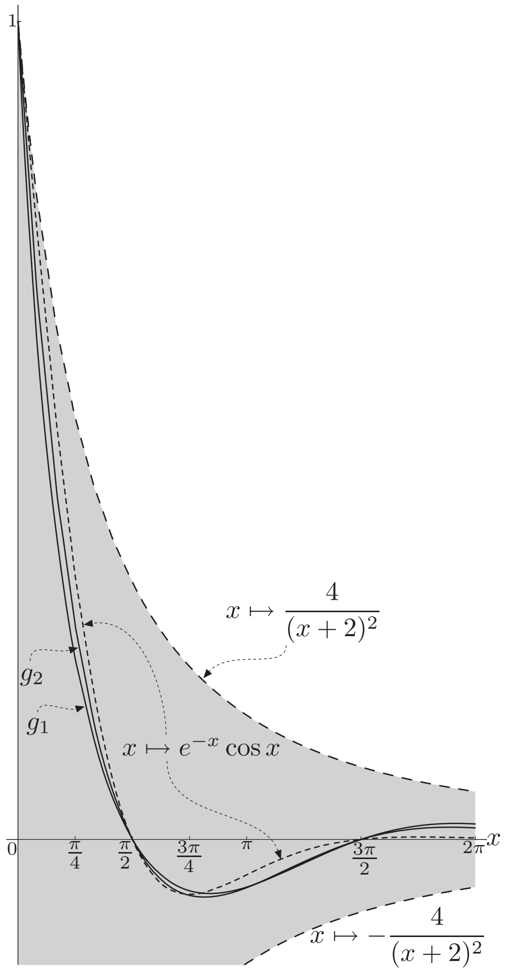
si ricava che $h_n(x)\leq h_{n+1}(x)$ per ogni $x\geq 4$ e $n\geq 2$. D'altra parte

$$h_2(x)-h_1(x) = -\frac{x\bigl((x-4)^2+6(x-4)+4\bigr)}{(x+1)^2(x+2)^2} < 0 \qquad \text{per } x\geq 4.$$

Quindi $h_n(x)\geq h_{n+1}(x)$ per ogni $x\geq 4$ e $n\geq 1$, cioè *la successione $n\mapsto h_n(x)$ è decrescente quando $x\geq 4$*. Insomma, potremmo prendere $n_0=1$ nei conti fatti sopra, cioè

$$0\leq h_n(x)\leq \begin{cases} 1 & \text{se } 0\leq x\leq 4,\\[2mm] h_1(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{se } x>4.\end{cases}$$

Anzi, con una modifica nei parametri si può verificare che $h_n(x)\geq h_{n+1}(x)$ per ogni $x\geq 1+\sqrt{5}\approx 3{,}236$ e per ogni $n\geq 1$; inoltre per $2<x<1+\sqrt{5}$ la successione $n\mapsto h_n(x)$ non è monotona, ma è definitivamente decrescente.



Altro modo. La successione

$$n \mapsto \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

(notare che l'esponente è n, non $n+1$) è positiva e crescente quando $x \geq 0$, come si vede per esempio con la formula

$$\frac{\partial}{\partial n}\log\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \int_0^{x/n} \frac{y}{(y+1)^2}\,dy\,.$$

Possiamo quindi maggiorare $h_n(x)$ per $n \geq 2$ così:

$$\begin{aligned} 0 \leq h_n(x) &= \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \leq \\ &\leq \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)^2} \leq \frac{1}{1\cdot\left(1+\frac{x}{2}\right)^2} = \\ &= \frac{4}{(x+2)^2} \qquad \forall x \geq 0 \quad \forall n \geq 2\,. \end{aligned}$$

Inoltre

$$\frac{4}{(x+2)^2} - h_1(x) = \frac{x(3x+4)}{(1+x)^2(2+x)^2} > 0 \qquad \forall x \geq 0\,.$$

Pertanto

$$\left|g_n(x)\right| \leq h_n(x) \leq \frac{4}{(x+2)^2} \qquad \forall x \geq 0 \quad \forall n \geq 1\,.$$

La funzione $x \mapsto 4/(x+2)^2$ non dipende da n ed ha integrale finito su $[0,+\infty[$. Per la convergenza dominata si può passare al limite sotto il segno di integrale. In questo modo non vengono usati i risultati dei punti **a** e **b**. Questa nuova stima è peggiore rispetto alla precedente per gli x grandi.