Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2000/01

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta dell'11 dicembre 2000

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Sia X uno spazio topologico, sia S un insieme di funzioni $X \to \mathbb{R}$ che contiene tutte le funzioni continue, e che sia stabile per somma e prodotto (cioè $f, g \in S$ implica $f + g, fg \in S$) nonché per convergenza puntuale di successioni (cioè se $f_n \in S$ per ogni n e $f_n(x) \to f(x)$ per $n \to +\infty$ per ogni $x \in X$, allora anche $f \in S$).

a. Dimostrare che l'insieme $\mathcal{F}$ degli $E \subset X$ tali che $\chi_E \in S$ è una σ-algebra su X. (Se $\chi_A, \chi_B \in S$ allora $\chi_{A\cap B} \in S\ldots$).

b. X sia di Hausdorff, localmente compatto, in cui ogni aperto è σ-compatto. Allora S contiene tutte le funzioni $X \to \mathbb{R}$ boreliane.
(Dimostrare che S contiene tutte le funzioni caratteristiche di aperti).

c. Sia X sia uno spazio metrico. Allora S contiene tutte le funzioni $X \to \mathbb{R}$ boreliane.
(Dati $x \in X$ e $\varnothing \neq E \subseteq X$, porre $d(x, E) := \inf\{d(x, y) \ : \ y \in E\}$, mostrare che $x \mapsto d(x, E)$ è continua; se V è un aperto di X considerare $f_V(x) := d(x, X \setminus V)$; a partire da f_V si può costruire una successione di funzioni di S che converge puntualmente a χ_V).

2. Poniamo $F(x) := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{|x - e^t|}} dt$.

a. Dimostrare che F è una funzione ben definita da $\mathbb{R}$ in sé.

b. Dimostrare che la F è di classe C^2 su $]-\infty, 1[$, e in 1 ha derivata sinistra finita e derivata seconda sinistra infinita.

c. Sia $\varphi\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ di classe C^2 con $\varphi'' \geq 0$, e sia $0 \leq u < 1$. Dimostrare che $\varphi(1) - \varphi(0) \leq (\varphi(1) - \varphi(u))/(1 - u) \leq \varphi'(1)$. Dedurre che $x - 1 \leq (x - x^u)/(1 - u) \leq x \log x$ e $x \leq (x - ux^u)/(1 - u) \leq x(1 + \log x)$ per $x > 1$, $0 \leq u < 1$.
(Per esempio verificare che $(x - x^u)/(1 - u) = \int_0^1 \varphi'((1 - r)u + r)dr$; φ' è crescente...).

d. Dimostrare che se $x > 1$ si ha che

$$F(x) = \int_0^1 \frac{u(\ln x)^2 \, du}{\sqrt{x - x^u}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{v \, dv}{\sqrt{e^v - 1}} + \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{dv}{\sqrt{e^v - 1}} \, .$$

Dedurre che F è di classe C^1 su $]1, +\infty[$ e ha derivata destra finita in 1.
(Spezzare l'intervallo d'integrazione nel punto di singolarità e cambiare variabile).

e. F è di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}$, ma non di classe C^2.

Punti: 15+15, 5+15+10+20+10.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta dell'11 dicembre 2000

Svolgimento

1. a. Sia $\mathcal{F}$ l'insieme degli $E \subset X$ tali che $\chi_E \in S$. Dimostriamo che $\mathcal{F}$ è una σ-algebra. Ovviamente $X \in \mathcal{F}$ perché $\chi_X \equiv 1$, e le costanti sono continue. Se $E, F \in \mathcal{F}$ allora $E \cap F \in \mathcal{F}$ perché S è stabile per prodotti e $\chi_{E\cap F} = \chi_E \cdot \chi_F$; inoltre anche $E \cup D \in \mathcal{F}$ perché $\chi_{E\cup F} = \chi_E + \chi_F + (-1) \cdot \chi_{E\cap F}$, ed S è stabile per somme e prodotti per costanti. $\mathcal{F}$ è stabile per complementi, perché $\chi_{X\setminus E} = 1 + (-1) \cdot \chi_E$. Infine, se $E_n \in \mathcal{F}$ è una successione di elementi di $\mathcal{F}$ con unione E, allora anche E sta in $\mathcal{F}$, perché $\chi_{E_1 \cup \cdots E_n}$ sta in S e converge puntualmente a χ_E per $n \to +\infty$.

b. X sia di Hausdorff, localmente compatto, in cui ogni aperto è σ-compatto. Cominciamo col dimostrare che se V è aperto in X allora $\chi_V \in S$. Per ipotesi esiste una successione K_n di compatti la cui unione è V. Possiamo supporre che K_n sia crescente. Dai risultati generali sugli spazi di Hausdorff localmente compatti sappiamo che per ogni n esiste $f_n : S \to \mathbb{R}$ continua (in particolare $f_n \in S$), con supporto in V e costantemente 1 su K_n. La successione f_n converge puntualmente a χ_V. Infatti per $x \in X \setminus V$ si ha $f_n(x) = 0 = \chi_V(x)$ per ogni n, mentre per $x \in V$ esiste n_0 tale che $x \in K_{n_0}$, per cui $f_n(x) = 1 = \chi_V(x)$ per ogni $n \ge n_0$. Dato che S è stabile per convergenza puntale di successioni, S contiene anche χ_V.
L'insieme $\mathcal{F}$ del punto **a** contiene dunque tutti i boreliani, perché è una σ-algebra contenente gli aperti.
Sia $f : X \to [0, +\infty[$ una funzione boreliana. Se f è semplice allora sta in S perché combinazione lineare di funzioni di S. Se f infine non è semplice, esiste una successione f_n di funzioni semplici boreliane che converge a f puntualmente. Quindi anche f sta in S perché S è stabile per convergenza puntuale di successioni.

c. Dati $x \in X$ e $\varnothing \neq E \subseteq X$, poniamo $d(x, E) := \inf\{d(x, z) \ : \ z \in E\}$. Siano $x, y \in X$, $z \in E$. Allora dalla disuguaglianza triangolare

$$d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z),$$

passando all'estremo inferiore rispetto a $z \in E$,

$$d(x, E) \le d(x, y) + d(x, E)\,.$$

Essendo $E \neq \varnothing$, i tre termini sono finiti, e possiamo scrivere

$$d(x, E) - d(y, E) \le d(x, y)\,.$$

Scambiando i ruoli fra x e y abbiamo anche che

$$d(y, E) - d(x, E) \le d(y, x) = d(x, y)\,.$$

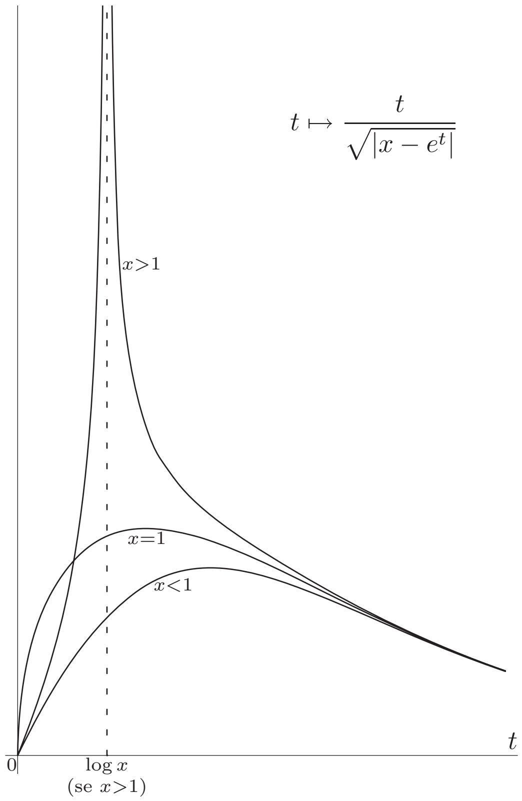
Mettendo insieme le due disuguaglianze otteniamo

$$\big|d(x, E) - d(y, E)\big| \le d(x, y)\,.$$

Questo mostra che la funzione $x \mapsto d(x, E)$ è continua (lipschitziana di costante 1).
Sia ora V aperto in X, con complemento $X \setminus V$ non vuoto. La funzione $f(x) := d(x, X \setminus V)$ è continua su X e quindi sta in S. Se $x \in V$ allora esiste una palla di centro x e raggio $r > 0$ tutta contenuta in V. Ma allora $f(x) = \inf\{d(x, z) \ : \ z \in X \setminus V\} \ge r > 0$. Se invece $x \in X \setminus V$ allora $0 \le f(x) \le d(x, x) = 0$.
Anche la funzione $f_n(x) := \min\{nf(x), 1\}$ è continua perché composizione di funzioni continue. Inoltre se $x \in X \setminus V$ abbiamo $f_n(x) = 0$ per ogni n, mentre se $x \in V$ $nf(x) \to +\infty$ per $n \to +\infty$, per cui $f_n(x) = 1$ per ogni n abbastanza grande. Quindi $f_n \to \chi_V$ puntualmente per $n \to +\infty$. Ne segue che $V \in \mathcal{F}$. La conclusione segue come nel punto precedente.

2. a. La funzione integranda

$$f(t,x) := \frac{t}{\sqrt{|x-e^t|}}$$



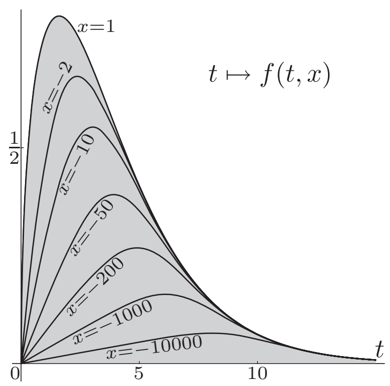
come funzione di t è definita, continua e positiva per $t \in [0,+\infty[$ escluso il punto $t = \ln x$ quando $x \geq 1$. Quindi l'integrale

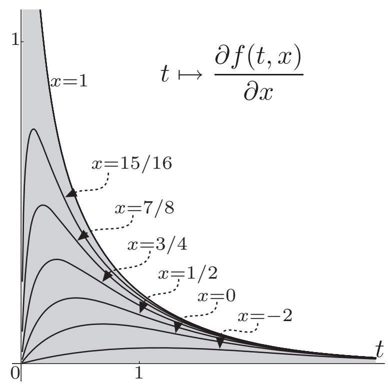
$$F(x) := \int_0^{+\infty} f(t,x)dt$$

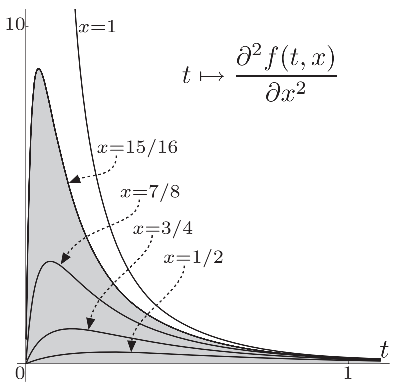
è ben definito come numero in $[0,+\infty]$. L'andamento asintotico per $t \to +\infty$ è del tipo $te^{-t/2}$, che è integrabile. Quando $x < 1$ non ci sono singolarità, e quindi l'integrale è finito. Per $x \geq 1$ il denominatore si annulla per $t = \ln x \geq 0$. L'andamento asintotico di $f(t,x)$ per $t \to \log x$ si può evidenziare per esempio così:

$$\begin{aligned}
f(t,x) &= \frac{t}{\sqrt{|x-e^t|}} = \frac{t}{\sqrt{|x-e^{t-\log x+\log x}|}} = \\
&= \frac{t}{\sqrt{|x|}\sqrt{|1-e^{t-\log x}|}} = \\
&= \frac{t}{\sqrt{|t-\log x|}} \cdot \frac{1}{\sqrt{|x|}} \underbrace{\sqrt{\left|\frac{t-\log x}{1-e^{t-\log x}}\right|}}_{\to 1 \text{per } t \to \log x} \sim \\
&\sim \begin{cases} \sqrt{t} & \text{per } x = 1, \\ c|t-\log x|^{-1/2} & \text{per } x > 1, \end{cases}
\end{aligned}$$

che è integrabile attorno a $t = \log x$. Quindi $F(x)$ ha valore finito per ogni $x \in \mathbb{R}$.







b. Per $x \leq 1$ e $t > 0$ l'espressione $x - e^t$ è negativa, e quindi

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{e^t - x}} dt \qquad \text{per } x \leq 1\,.$$

Cominciamo dalla continuità. L'integrando $f(t,x) = t/\sqrt{e^t - x}$ è positivo e continuo nella variabile x per $x \leq 1$ per ogni $t > 0$ fissato. Essendo $f(t,x)$ anche crescente rispetto a x, sempre per $x \leq 1$, si maggiora col valore che assume per $t = 1$:

$$\sup_{x\leq 1}|f(t,x)| = \sup_{x\leq 1}\left|\frac{t}{\sqrt{e^t-x}}\right| = \left|f(t,1)\right| = \frac{t}{\sqrt{e^t-1}}\,.$$

La funzione dominante $t \mapsto t/\sqrt{e^t-1}$ ha $F(1)$ per integrale su $]0,+\infty[$, che è finito, come abbiamo già notato. Il teorema della convergenza dominata ci dice pertanto che l'integrale $F(x)$ è continuo su $]-\infty,1]$. Passiamo alla derivabilità, sempre per $x \le 1$:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{t}{\sqrt{e^t-x}}\Big) = -\frac{1}{2}t(e^t-x)^{-3/2}(-1) = \frac{t}{2(e^t-x)^{3/2}}\,.$$

Come prima, quest'espressione è continua, positiva e crescente rispetto a x per $x \le 1$ per $t>0$. Maggiorando col valore che assume in $x=1$ otteniamo

$$\sup_{x\le 1}\Big|\frac{\partial}{\partial x} f(t,x)\Big| = \frac{t}{2(e^t-1)^{3/2}} \sim \begin{cases} t^{-1/2} & \text{per } t\to 0, \\ te^{-3t/2} & \text{per } t\to +\infty, \end{cases}$$

che è in $L^1(]0,+\infty[)$. Quindi la restrizione di F a $]-\infty,1]$ è di classe C^1. La derivata della restrizione $F|_{]-\infty,1]}(x)$ per $x=1$ è la derivata sinistra di $F(x)$ per $x=1$:

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} f(t,x)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{t}{2(e^t-x)^{3/2}}\,dt \quad \text{per } x<1, \qquad F'_-(1) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{2(e^t-1)^{3/2}}\,dt\,.$$

Studiamo la derivata seconda:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\frac{t}{\sqrt{e^t-x}}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{t}{2(e^t-x)^{3/2}}\Big) = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}t(e^t-x)^{-5/2}(-1) = \frac{3t}{4(e^t-x)^{5/2}}\,.$$

Come prima, quest'espressione è continua, positiva e crescente rispetto a x per $x \le 1$ per $t>0$, ed è in $L^1(0,+\infty)$ se $x<1$. Purtroppo per $x=1$ non è in $L^1(0,+\infty)$, perché va come $t^{-3/2}$ per $t\to 0^+$. Accontentandoci dell'estremo superiore sugli $x \le x_0 < 1$:

$$\sup_{x\le x_0}\Big|\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t,x)\Big| = \frac{3t}{4(e^t-x_0)^{5/2}}\,.$$

ricaviamo che la restrizione di F a $]-\infty,x_0]$ è di classe C^2 per ogni $x_0<1$, e

$$F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t,x)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{3t}{4(e^t-x_0)^{5/2}}\,dt \qquad \text{per } x<1.$$

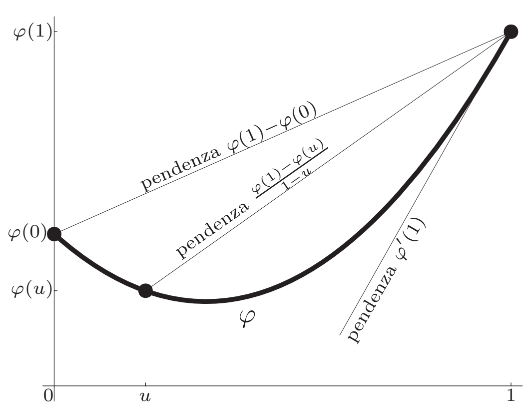
Per decidere il caso $x=1$ possiamo applicare il lemma di Fatou (gli integrandi sono positivi):

$$\begin{aligned}\min\lim_{x\to 1^-} F''(x) &= \min\lim_{x\to 1^-}\int_0^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t,x)\,dt \ge \int_0^{+\infty}\Big(\min\lim_{x\to 1^-}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t,x)\Big)dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{3t}{4(e^t-1)^{5/2}}\,dt = +\infty\,.\end{aligned}$$

Quindi la derivata seconda sinistra $F''_-(1)$ è infinita (propriamente non esiste).

c. La disuguaglianza si può interpretare in termini di disuguaglianze fra rapporti incrementali e derivate di φ:

$$\frac{\varphi(1)-\varphi(0)}{1-0} \le \frac{\varphi(1)-\varphi(u)}{1-u} \le \varphi'(1) \qquad \text{se } 0\le u<1.$$



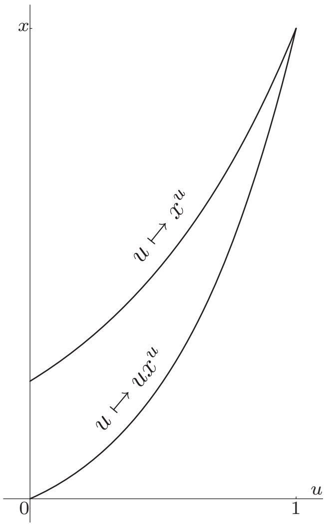
La disuguaglianza $\varphi'' \ge 0$ dice che φ è convessa. Chi ha familiarità con le funzioni convesse sa che i loro rapporti incrementali sono funzioni crescenti di ciascuno degli estremi. Un modo di dimostrare la disuguaglianza senza usare la teoria delle funzioni convesse è di passare per l'identità

$$\frac{\varphi(1)-\varphi(u)}{1-u} = \int_0^1 \varphi'((1-r)u+r)dr\,.$$

Questa si verifica con il cambio di variabile $(1-r)u+r=t$, $r=(s-u)/(1-u)$, $dr=ds/(1-u)$:

$$\int_0^1 \varphi'((1-r)u+r)dr = \int_u^1 \varphi'(s)\frac{ds}{1-u} = \frac{1}{1-u}\big[\varphi(s)\big]_{s=u}^{s=1} = \frac{\varphi(1)-\varphi(u)}{1-u}\,.$$

Ma l'integrando $\varphi'((1-r)u+r)$ è crescente rispetto a u perché composta di φ' e $u\mapsto(1-r)u+r$, che sono entrambi crescenti. Quindi anche l'integrale $\int_0^1\varphi'((1-r)u+r)dr$ cresce con u. Assegnando a u successivamente i valori $0,u,u_1$, nell'ordine $0\le u\le u_1<1$, abbiamo la disuguaglianza



$$\frac{\varphi(1)-\varphi(0)}{1-0} \le \frac{\varphi(1)-\varphi(u)}{1-u} \le \frac{\varphi(1)-\varphi(u_1)}{1-u_1}\,.$$

da cui, passando al limite per $u_1\to1^-$ otteniamo

$$\varphi(1)-\varphi(0) \le \frac{\varphi(1)-\varphi(u)}{1-u} \le \varphi'(1)\,.$$

Se poniamo $\varphi(u):=x^u$ con $x>0$ abbiamo che $\varphi'(u)=x^u\log x$ e $\varphi''(u)=x^u\log^2 x\ge0$, e quindi

$$x-1 \le \frac{x-x^u}{1-u} \le x\log x\,. \qquad \text{se } x>0,\ 0\le u<1.$$

Ponendo invece $\varphi(u):=ux^u$ si ha $\varphi'(u)=x^u(1+u\log x)$, $\varphi''(u)=x^u(2+u\log x)\log x$. Quando $x\ge1$ la φ'' è ≥0 su $[0,1]$. Quindi la disuguaglianza vale per questa φ:

$$x \le \frac{x-ux^u}{1-u} \le x(1+\log x) \qquad \text{se } x\ge1,\ 0\le u<1.$$

d. Per $x>1$ spezziamo l'intervallo di integrazione nel punto $t=\log x$:

$$F(x) = \int_0^{\log x}\frac{t}{\sqrt{x-e^t}}dt + \int_{\log x}^{+\infty}\frac{t}{\sqrt{e^t-x}}dt \qquad \text{per } x>1\,.$$

Nel primo integrale ci riportiamo all'intervallo fisso $[0,1]$ con il cambio di variabile lineare $u=t/\log x$, $du=dt/\log x$:

$$\int_0^{\log x}\frac{t}{\sqrt{x-e^t}}dt = \int_0^1\frac{u\log x}{\sqrt{x-e^{u\log x}}}(\log x)du = \int_0^1\frac{u\log^2 x}{\sqrt{x-x^u}}du\,.$$

Nell'altro integrale ci riportiamo all'intervallo fisso di integrazione $[0,+\infty[$ con la traslazione $v=t-\log x$, $dv=dt$:

$$\int_{\log x}^{+\infty}\frac{t}{\sqrt{e^t-x}}dt = \int_0^{+\infty}\frac{v+\log x}{\sqrt{e^{v+\log x}-x}}dv = \int_0^{+\infty}\frac{v+\log x}{\sqrt{x(e^v-1)}}dv =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}\frac{v}{\sqrt{e^v-1}}dv + \frac{\log x}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{e^v-1}}dv\,.$$

Mettendo insieme i risultati:

$$F(x) = \int_0^1\frac{u\log^2 x}{\sqrt{x-x^u}}du + \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}\frac{v}{\sqrt{e^v-1}}dv + \frac{\log x}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{e^v-1}}dv \qquad \text{per } x>1.$$

In questa espressione i coefficienti davanti agli ultimi due integrali sono tutti di classe C^∞ come funzioni di $x>0$, e gli ultimi due integrali sono finiti e non dipendono da x. Quindi la regolarità di $F(x)$ per $x>1$ coincide con la regolarità del primo integrale soltanto, che battezziamo $G(x)$:

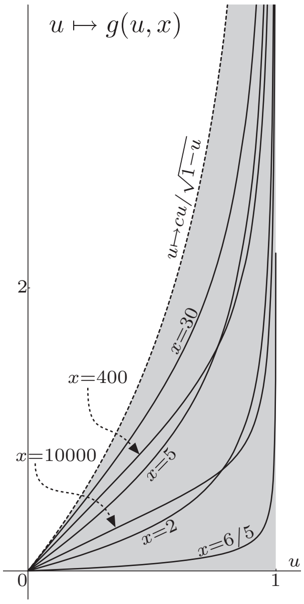
$$G(x) := \int_0^1\frac{u\log^2 x}{\sqrt{x-x^u}}du\,.$$

$G(x)$ è finito per $x > 1$. È meglio non cedere alla tentazione di portare il fattore $\log^2 x$ fuori dall'integrale. Definiamo invece l'integrando anche per $x = 1$ come

$$g(u,x) := \begin{cases} \dfrac{u\log^2 x}{\sqrt{x - x^u}} & \text{per } x > 1, \\ 0 & \text{per } x = 1. \end{cases}$$

Così $g(u,x)$ viene continuo rispetto a x per $x \geq 1$, e la formula

$$F(x) = \int_0^1 g(u,x)\,du + \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} \frac{u}{\sqrt{e^u - 1}}du + \frac{\log x}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^u - 1}}du$$

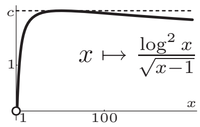


vale banalmente anche per $x = 1$. L'integrando $g(u,x)$ come funzione di x non è agevole da studiare esattamente. Conviene maggiorare per $x > 1$, $0 \leq u < 1$ sfruttando la disuguaglianza del punto **c**:

$$\bigl|g(u,x)\bigr| = \Bigl|\frac{u\log^2 x}{\sqrt{x - x^u}}\Bigr| \leq \frac{u\log^2 x}{\sqrt{(x-1)(1-u)}} = \frac{\log^2 x}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{u}{\sqrt{1-u}}\,.$$

L'ultimo membro è il prodotto di una funzione della sola x per una della sola u. La prima funzione

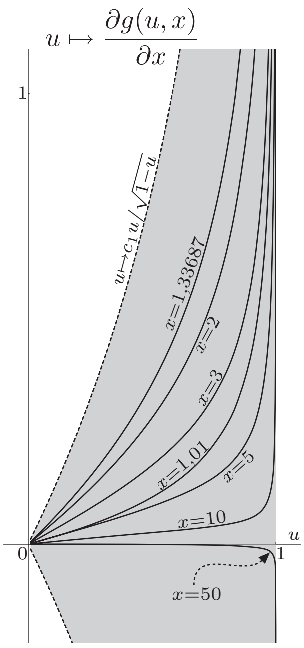
$$x \mapsto \frac{\log^2 x}{\sqrt{x-1}}$$



è limitata sull'intervallo $]1, +\infty[$, perché è continua e tende a 0 agli estremi (per $x \to 1^+$ è asintotica a $(x-1)^{3/2}$). Quindi c'è una costante $0 < c < +\infty$ tale che

$$\sup_{x\geq 1}\bigl|g(u,x)\bigr| \leq c\frac{u}{\sqrt{1-u}}\,.$$

La funzione $u \mapsto u/\sqrt{1-u}$ ha integrale finito fra 0 e 1. Come già notato, la $g(u,x)$ è continua in x per $x \geq 1$. Deduciamo che l'integrale $G(x) = \int_0^1 g(u,x)\,du$ è una funzione continua di x su $[1, +\infty[$. Dunque F è continua su $[1, +\infty[$. In particolare, F è continua anche a destra in 1. Tenendo conto dei risultati del punto **b** concludiamo che F è continua su tutto $\mathbb{R}$.



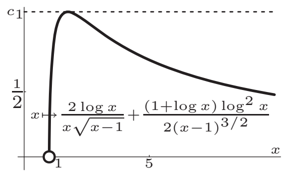
Per studiare la derivabilità di $G(x)$ per $x \geq 1$ deriviamo l'integranda rispetto a x:

$$\frac{\partial g(u,x)}{\partial x} = \frac{\bigl(2u(\log x)/x\bigr)\sqrt{x - x^u} - (u\log^2 x)\frac{1}{2}(x - x^u)^{-1/2}(1 - ux^{u-1})}{x - x^u} =$$
$$= \frac{2u\log x}{x\sqrt{x - x^u}} - \frac{u(x - ux^u)\log^2 x}{2x(x - x^u)^{3/2}}\,.$$

Maggioriamo per $x > 1$, $0 < u < 1$:

$$\Bigl|\frac{\partial g(u,x)}{\partial x}\Bigr| \leq \Bigl|\frac{2u\log x}{x\sqrt{x - x^u}}\Bigr| + \Bigl|\frac{u(x - ux^u)\log^2 x}{2x(x - x^u)^{3/2}}\Bigr| \leq$$
$$\leq \frac{2u\log x}{x\sqrt{(x-1)(1-u)}} + \frac{ux(1 + \log x)(1-u)\log^2 x}{2x(x-1)^{3/2}(1-u)^{3/2}} =$$
$$= \left(\frac{2\log x}{x\sqrt{x-1}} + \frac{(1 + \log x)\log^2 x}{2(x-1)^{3/2}}\right)\frac{u}{\sqrt{1-u}}\,.$$

Come prima, la funzione della sola x che compare a fattore è limitata per $x > 1$, e quindi:



$$\sup_{x\geq 1}\left|\frac{\partial g(u,x)}{\partial x}\right| \leq c_1\frac{u}{\sqrt{1-u}} \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 c_1\frac{u}{\sqrt{1-u}}\,du < +\infty\,.$$

Essendo inoltre $\partial_x g(u,x)$ continua in x, deduciamo che G, e assieme a lei anche F, è di classe C^1 su $]1,+\infty[$. Anzi, possiamo passare al limite sotto il segno di integrale per $x \to 1^+$:

$$\lim_{x\to 0^+} G'(x) = \lim_{x\to 0^+}\int_0^1 \frac{\partial g(u,x)}{\partial x}\,du = \int_0^1\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\partial g(u,x)}{\partial x}\right)du = \int_0^1 0\,du = 0\,.$$

Quindi G è di classe C^1 su $[1,+\infty[$. Anche la restrizione di F a $[1,+\infty[$ è di classe C^1. Per $x > 1$

$$\begin{aligned} F'(x) &= G'(x) - \frac{1}{2x^{3/2}}\int_0^{+\infty}\frac{u}{\sqrt{e^u-1}}du + \frac{2-\log x}{2x^{3/2}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{e^u-1}}du = \\ &= \int_0^1 \frac{2u\log x}{x\sqrt{x-x^u}}\,du - \frac{1}{2x^{3/2}}\int_0^{+\infty}\frac{u}{\sqrt{e^u-1}}du + \frac{2-\log x}{2x^{3/2}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{e^u-1}}du\,, \end{aligned}$$

mentre per $x = 1$

$$F'_+(1) = 0 - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{u}{\sqrt{e^u-1}}du + \int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{e^u-1}}du = \int_0^{+\infty}\frac{2-u}{2\sqrt{e^u-1}}du\,.$$

e. Si dà il caso che $F'_-(1) = F'_+(1)$. Il valore dei due integrali è $\pi(1-\log 2)$, ma non è elementare da calcolare. Fortunatamente però è elementare la differenza fra i due integrali:

$$\begin{aligned} F'_+(1) - F'_-(1) &= \int_0^{+\infty}\frac{2-t}{2\sqrt{e^t-1}}\,dt - \int_0^{+\infty}\frac{t}{2(e^t-1)^{3/2}}\,dt = \int_0^{+\infty}\left(\frac{2-t}{2\sqrt{e^t-1}} - \frac{t}{2(e^t-1)^{3/2}}\right)dt = \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{2(e^t-1)-te^t}{2(e^t-1)^{3/2}}\,dt = \left[\frac{t}{\sqrt{e^t-1}}\right]_0^{+\infty} = 0\,. \end{aligned}$$

Dunque $F \in C^1(\mathbb{R})$. Per quanto riguarda la derivata seconda, nel punto **b** abbiamo visto che $F''(1)$ non esiste (finita). Le figure seguenti fanno vedere il grafico di F su $[-5,10]$, e un ingrandimento della regione attorno a $x = 1$. Per la cronaca, $F(1)$ dovrebbe valere $\pi\log 4$.