Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1999/2000

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta del 19 settembre 2000

Cognome e Nome:

Matricola: | Documento di identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Per $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ poniamo

$$f_n(x) := f\Big(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\Big) .$$

($\lfloor a \rfloor$ è il massimo intero $\leq a$).

a. Dimostrare che f_n è boreliana per ogni n.

b. Supponiamo che f sia continua a sinistra in ogni punto. Dimostrare che $f_n \to f$ puntualmente su tutto $\mathbb{R}$ per $n \to +\infty$. Dedurne che pure f è boreliana.

c. Supponiamo che f abbia limite finito da sinistra in ogni punto, ma che non sia necessariamente continua a sinistra. Dimostrare che una sottosuccessione di $n \mapsto f_n$ converge puntualmente a una funzione boreliana $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, che differisce da f su un insieme al più numerabile, e dedurne che pure f è boreliana.

2. Una $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice sviluppabile in serie di potenze attorno a $x_0 \in \mathbb{R}$ se esiste un intorno U di x_0 e una successione di coefficienti $C_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} C_n (x-x_0)^n \qquad \forall x \in U ,$$

e la serie converge totalmente su U. Analogamente una funzione di due variabili $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice sviluppabile in serie di potenze attorno a $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ se esiste un intorno V di (x_0, y_0) in $\mathbb{R}^2$ e per ogni $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ esiste un coefficiente $c_{n,m} \in \mathbb{R}$ tali che

$$f(x,y) = \sum_{n,m\geq 0} c_{n,m} (x-x_0)^n (y-y_0)^m \qquad \forall (x,y) \in V,$$

e la serie converge totalmente su V. Una funzione sviluppabile in serie di potenze attorno ad ogni punto si dice "analitica reale".

a. Siano $x_0, y_0, a, b \in \mathbb{R}$, $\varphi(x,y) := (x, ax+b)$, e sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sviluppabile in serie di potenze attorno a $\varphi(x_0, y_0)$, con convergenza totale su V. Dimostrare che la funzione $g := f \circ \varphi$ è sviluppabile in serie di potenze attorno a (x_0, y_0) con convergenza totale su $\varphi^{-1}(V)$.

b. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ analitica reale e poniamo $F(x) := \int_0^1 f(x,t)\, dt$. Dimostrare che F è ben definita e che è analitica reale.
(Cominciare dal caso $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [0,1] \subset V$ e integrare per serie, se lecito).

Punti: 5+10+15 ,7+15.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

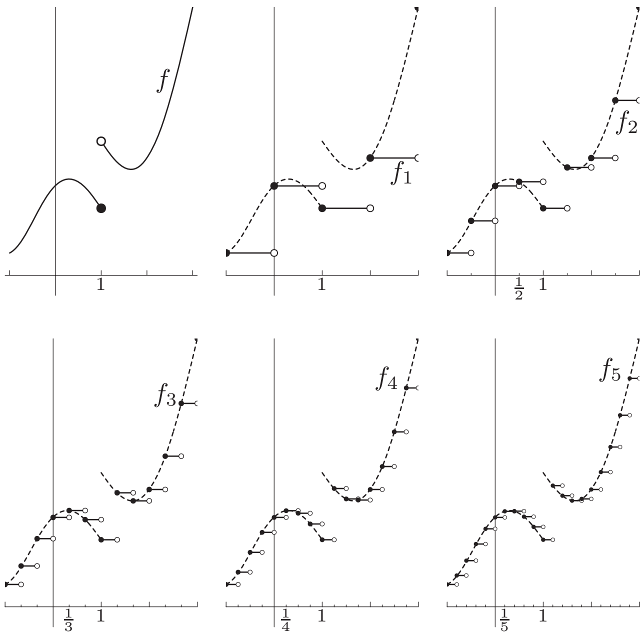
Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta del 19 settembre 2000

Svolgimento

1. a. Sia V un aperto di $\mathbb{R}$. Dobbiamo dimostrare che $f_n^{-1}(V)$ è un boreliano di $\mathbb{R}$. Allora:

$$\begin{aligned} f_n^{-1}(V) &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, f_n(x) \in V\} = \Big\{x \in \mathbb{R} \,:\, f\Big(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\Big) \in V\Big\} = \Big\{x \in \mathbb{R} \,:\, \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \in f^{-1}(V)\Big\} = \\ &= \Big\{x \in \mathbb{R} \,:\, \lfloor nx \rfloor \in nf^{-1}(V)\Big\} = \Big\{x \in \mathbb{R} \,:\, \lfloor nx \rfloor \in \big(nf^{-1}(V)\big) \cap \mathbb{Z}\Big\} = \\ &= \Big\{x \in \mathbb{R} \,:\, \exists m \in \big(nf^{-1}(V)\big) \cap \mathbb{Z} \text{ tale che } \lfloor nx \rfloor = m\Big\} = \bigcup_{m \in (nf^{-1}(V)) \cap \mathbb{Z}} \{x \,:\, \lfloor nx \rfloor = m\} = \\ &= \bigcup_{m \in (nf^{-1}(V)) \cap \mathbb{Z}} \{x \,:\, m \le nx < m+1\} = \bigcup_{m \in (nf^{-1}(V)) \cap \mathbb{Z}} \Big\{x \,:\, \frac{m}{n} \le x < \frac{m+1}{n}\Big\} = \\ &= \bigcup_{m \in (nf^{-1}(V)) \cap \mathbb{Z}} \Big[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\Big[\,. \end{aligned}$$



L'insieme $(nf^{-1}(V)) \cap \mathbb{Z}$ è al più numerabile, gli intervalli semiaperti sono boreliani, e unione numerabile di boreliani è boreliana. Quindi f_n è boreliana. Notare che non si è usata l'ipotesi che V sia aperto.
Un approccio un poco diverso: osservando di nuovo che per $m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \lfloor nx \rfloor = m \iff m \le nx < m+1 \iff \\ \iff \frac{m}{n} \le x < \frac{m+1}{n}\,, \end{aligned}$$

possiamo scrivere

$$f_n(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f\Big(\frac{m}{n}\Big) \chi_{[m/n,(m+1)/n[}(x)\,.$$

La f risulta boreliana perché somma di una serie (convergente puntualmente) di funzioni caratteristiche di intervalli. Qui accanto c'è un grafico di una f e delle sue $f_1, \dots, f_5$. Il grafico di f_n è formato da segmenti orizzontali semiaperti di lunghezza $1/n$ incernierati a sinistra sul grafico di f.

b. Posto $m = \lfloor nx \rfloor$ si ha, come già osservato

$$\frac{m}{n} \le x_0 < \frac{m+1}{n}\,, \qquad \text{cioè} \qquad \frac{\lfloor nx_0 \rfloor}{n} \le x < \frac{\lfloor nx_0 \rfloor}{n} + \frac{1}{n}\,,$$

cioè ancora

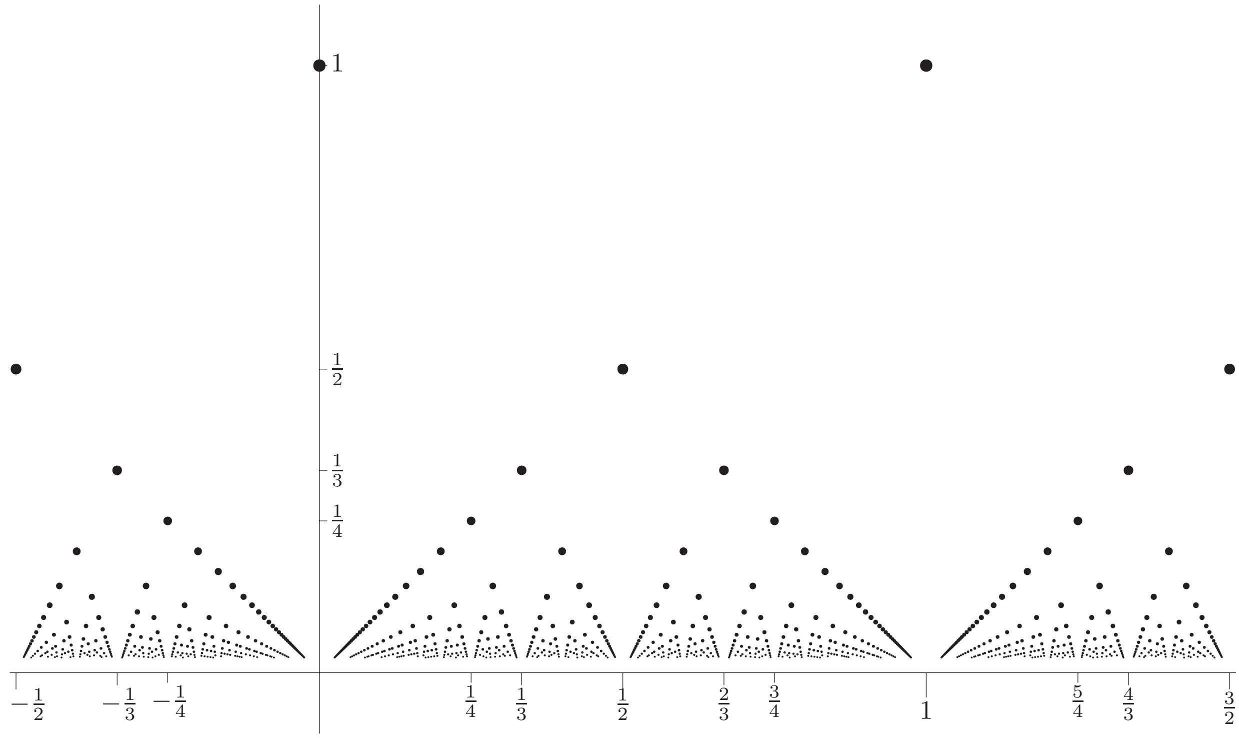
$$x_0 - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor nx_0 \rfloor}{n} \le x_0\,.$$

Quindi
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor nx_0 \rfloor}{n} = x_0 \,, \qquad \text{e inoltre} \qquad \frac{\lfloor nx_0 \rfloor}{n} \le x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \,.$$
Se f è continua a sinistra in $x_0 \in \mathbb{R}$ deduciamo che
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x_0) = \lim_{n\to+\infty} f\Big(\frac{\lfloor nx_0 \rfloor}{n}\Big) = f(x_0) \,.$$
Se f è continua a sinistra in ogni punto allora $f_n \to f$ puntualmente su tutto $\mathbb{R}$, e pertanto f è boreliana, in quanto limite puntuale di una successione di funzioni boreliane.

c. Sia x_0 irrazionale. Allora la disuguaglianza già osservata
$$x_0 - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor nx_0 \rfloor}{n} \le x_0$$
è necessariamente stretta, perché il termine al centro è razionale. Quindi
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor nx_0 \rfloor}{n} = x_0 \,, \qquad \text{e inoltre} \qquad \frac{\lfloor nx_0 \rfloor}{n} < x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \,.$$
Supponiamo che f abbia limite a sinistra in ogni punto. Allora
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x_0) = \lim_{n\to+\infty} f\Big(\frac{\lfloor nx_0 \rfloor}{n}\Big) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) =: f(x_0^-) \,.$$
Quando $x_0 \in \mathbb{Q}$ non è detto che $f_n(x_0)$ abbia limite per $n \to +\infty$. Prendiamo per esempio $f := \chi_{\{1/2\}}$, $x_0 := 1/2$. Allora f ha limite a sinistra in x_0 (anzi, in ogni punto), ma
$$f_n(x_0) = f\Big(\frac{\lfloor n/2 \rfloor}{n}\Big) = \begin{cases} f\Big(\dfrac{n/2}{n}\Big) = f(1/2) = 1 & \text{se } n \text{ è pari,} \\ f\Big(\dfrac{(n-1)/2}{n}\Big) = f\Big(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2n}\Big) = 0 & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$
che non ha limite. Però la sottosuccessione $k \mapsto f_{2k}(1/2)$ è costantemente uguale a $f(1/2)$. Di più: f_{2k} coincide con f su tutti i multipli interi di $1/2$. Analogamente f_{3k} coincide con f su tutti i multipli interi di $1/3$. Poi f_{6k} e f coincidono sia sui multipli di $1/2$ che di $1/3$. Un'idea per coprire tutti i razionali (non contemporaneamente, ma ciascuno almeno definitivamente) è di prendere la sottosuccessione $k \mapsto f_{k!}$. Infatti, se $x_0 = p/q$ con $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, allora
$$f_{k!}(x_0) = f\Big(\frac{\lfloor k! \cdot x_0 \rfloor}{k!}\Big) = f\Big(\frac{\lfloor k! \cdot p/q \rfloor}{k!}\Big) = f\Big(\frac{k! \cdot p/q}{k!}\Big) = f(p/q) = f(x_0) \qquad \forall k \ge q \,,$$
perché quando $k \ge q$ fra i divisori di $k!$ c'è anche q, per cui $k! \cdot p/q$ viene intero. Se quindi poniamo
$$g(x) := \begin{cases} f(x^-) & \text{per } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ f(x) & \text{per } x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$
abbiamo che
$$\lim_{k\to+\infty} f_{k!}(x) = g(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \,.$$
In particolare, g è boreliana.
(Una scelta alternativa di sottosuccessione: posto $\sigma(k)$ il k-esimo numero primo, verificare che $k \mapsto f_{\sigma(k)}(x)$ converge a $f(x^-)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$).
Dobbiamo dimostrare ora che $g(x) \ne f(x)$ su un insieme di x al più numerabile. Posto
$$A_m := \Big\{ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ : \ \big| f(x) - f(x^-) \big| > \frac{1}{m} \Big\} \qquad \text{per } m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \,,$$

abbiamo che
$$\{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) \neq g(x)\} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m \,.$$
Ci basta dimostrare che A_m è al più numerabile per ogni m fissato. Sia quindi $x_0 \in A_m$. Per l'ipotesi su f esiste $\delta > 0$ tale che
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x_0 - \delta < x < x_0 \quad \Rightarrow \quad \big|f(x) - f(x_0^-)\big| < \frac{1}{2m} \,. \tag{1}$$
Quindi per ogni $x_1 \in \,]x_0 - \delta, x_0[$ possiamo passare al limite per $x \to x_1^-$ nella disuguaglianza $|f(x) - f(x_0)| < 1/(2m)$ ottenendo
$$\big|f(x_1^-) - f(x_0^-)\big| \leq \frac{1}{2m} \,,$$
ossia, scrivendo x al posto di x_1:
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x_0 - \delta < x < x_0 \quad \Rightarrow \quad \big|f(x^-) - f(x_0^-)\big| < \frac{1}{2m} \,. \tag{2}$$
Usando le formule (1) e (2) e la disuguaglianza triangolare:
$$\begin{aligned} x_0 - \delta < x < x_0 \quad &\Rightarrow \quad \big|f(x) - f(x^-)\big| \leq \big|f(x) - f(x_0^-)\big| + \big|f(x_0^-) - f(x^-)\big| \leq \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m} \\ &\Rightarrow \quad x \notin A_m \,. \end{aligned}$$
Insomma,
$$\forall x \in A_m \quad \exists \delta_x > 0 \quad]x - \delta_x, x[\cap A_m = \varnothing \,.$$
Ad ogni punto $x \in A_m$ associamo l'intervallo aperto non vuoto $I_x := \,]x - \delta_x, x[$. Gli intervalli associati a punti distinti sono disgiunti: supponiamo infatti che $x, y \in A_m$, $x < y$ e $]x - \delta_x, x[\cap]y - \delta_y, y[\neq \varnothing$. Allora necessariamente $x \in I_y = \,]y - \delta_y, y[$, contro il fatto assodato che I_y non interseca A_m. Per ogni $x \in A_m$ scegliamo un razionale $r(x)$ nell'intervallo I_x. L'applicazione $x \in r(x)$ è iniettiva da A_m in $\mathbb{Q}$ perché gli intervalli I_x sono disgiunti. Possiamo concludere che A_m ha al più la cardinalità di $\mathbb{Q}$. Il ragionamento è simile a quello usato per dimostrare che un insieme di punti isolati di $\mathbb{R}$ è al più numerabile. (Non è detto che i punti di A_m siano isolati, però sono "isolati a sinistra").
Infine, posto $D := \{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) \neq g(x)\}$, possiamo scrivere f come somma di due funzioni:
$$f = g\chi_{\mathbb{R}\setminus D} + f\chi_D \,.$$
Se dimostriamo che $g\chi_{\mathbb{R}\setminus D}$ e $f\chi_D$ sono entrambe boreliane, seguirà che anche f è boreliana. Poiché D è boreliano (in quanto al più numerabile) e g è boreliana (perché limite puntuale di una successione di funzioni boreliane), anche $g\chi_{\mathbb{R}\setminus D}$ è boreliano. Per finire, la funzione $f\chi_D$ è boreliana perché nulla al di fuori di un insieme numerabile. Più in dettaglio, dato V aperto di $\mathbb{R}$ abbiamo che
$$(f\chi_D)^{-1}(V) \begin{cases} \subseteq D & \text{se } 0 \notin V, \\ \supseteq \mathbb{R} \setminus D & \text{se } 0 \in V. \end{cases}$$
L'insieme $(f\chi_D)^{-1}(V)$ è boreliano perché sia gli insiemi al più numerabili che i loro complementi sono sempre boreliani.

Approfondimenti. Supponiamo che $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abbia limite a sinistra finito in ogni punto. Dimostrare che allora l'insieme dei punti di discontinuità di f è al più numerabile. Suggerimento: dimostrare che per ogni n l'insieme seguente è al più numerabile:
$$B_n := \left\{x_0 \in \mathbb{R} \ : \ \max\lim_{x \to x_0^+} \big|f(x) - f(x_0^-)\big| > \frac{1}{n}\right\}.$$
Corollario: non appena una tale funzione è limitata su un intervallo $[a, b]$ è ivi anche integrabile secondo Riemann.



Può succedere che una f con limite a sinistra in ogni punto abbia un insieme *denso* di punti di discontinuità? La risposta è sì: la funzione

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ è irrazionale,} \\ 1/q & \text{se } x = p/q, \text{ con } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \text{ con } p, q \text{ primi fra loro,} \end{cases}$$

ha limite (nullo) in ogni punto, ed è discontinua su tutti e soli i punti razionali. Un grafico di f è tentato qui sopra. Questa particolare funzione è di solito riportata nei libri di testo come l'esempio più semplice di una funzione integrabile secondo Riemann ma con infiniti punti di discontinuità.

2. a. Siano $x_0, y_0, a, b \in \mathbb{R}$, $\varphi(x, y) := (x, ax + b)$, e sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sviluppabile in serie di potenze attorno a $\varphi(x_0, y_0)$, con convergenza totale su V. Poniamo Siano $x_0, y_0, a, b \in \mathbb{R}$ e sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sviluppabile in serie di potenze attorno a $(x_0, ay_0 + b)$. Poniamo

$$g(x, y) := f\big(\varphi(x, y)\big) = f(x, ay + b)\,.$$

Dobbiamo dimostrare che g è sviluppabile in serie di potenze attorno a (x_0, y_0). L'ipotesi su f significa che esistono coefficienti $c_{n,m}$ e un intorno V di $\varphi(x_0, y_0)$ tali che

$$f(x, y) = \sum_{n,m\geq 0} c_{n,m}(x - x_0)^n (y - ay_0 - b)^m \qquad \forall (x, y) \in V\,,$$

e la serie converge totalmente su V, cioè

$$\sum_{n,m\geq 0} \sup_{(x,y)\in V} \Big| c_{n,m}(x - x_0)^n (y - ay_0 - b)^m \Big| < +\infty\,.$$

La funzione φ è continua. Quindi l'insieme $V' := \varphi^{-1}(V)$ è un intorno di (x_0, y_0). Se $(x, y) \in V'$ allora $\varphi(x, y) \in V$ e quindi vale lo sviluppo in serie

$$g(x, y) = f\big(\varphi(x, y)\big) = f(x, ay + b) = \sum_{n,m\geq 0} c_{n,m}(x - x_0)^n (ay + b - ay_0 - b)^m =$$

$$= \sum_{n,m\geq 0} \underbrace{a^m c_{n,m}}_{=:c'_{n,m}} (x - x_0)^n (y - y_0)^m = \sum_{n,m\geq 0} c'_{n,m}(x - x_0)^n (y - y_0)^m\,.$$

Quest'ultima serie converge totalmente su V' perché

$$\begin{aligned}
&\sum_{n,m\geq 0} \sup_{(x,y)\in V'} \left| c'_{n,m}(x-x_0)^n(y-y_0)^m \right| = \\
&\quad = \sum_{n,m\geq 0} \sup\left\{ \left| a^m c_{n,m}(x-x_0)^n(y-y_0)^m \right| \;:\; (x,y)\in V' \right\} = \\
&\quad = \sum_{n,m\geq 0} \sup\left\{ \left| c_{n,m}(x-x_0)^n(ay-ay_0)^m \right| \;:\; (x,y)\in \varphi^{-1}(V) \right\} = \\
&\quad = \sum_{n,m\geq 0} \sup\left\{ \left| c_{n,m}(x-x_0)^n(\underbrace{ay+b}_{=y'}-ay_0-b)^m \right| \;:\; \underbrace{\varphi(x,y)}_{=(x',y')}\in V \right\} = \\
&\quad = \sum_{n,m\geq 0} \sup\left\{ \left| c_{n,m}(x'-x_0)^n(y'-ay_0-b)^m \right| \;:\; (x',y')\in V \right\} < +\infty\,.
\end{aligned}$$

Quindi g è sviluppabile in serie di potenze attorno a (x_0, y_0).

b. Osserviamo per cominciare che una funzione analitica reale di una o due variabili è automaticamente continua. Infatti in un intorno di ogni punto fissato coincide con una serie totalmente (e quindi uniformemente) convergente di funzioni continue (più precisamente polinomi). In particolare, data una $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ analitica reale, ha senso definire

$$F(x) := \int_0^1 f(x,y)\,dx\,.$$

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Dobbiamo dimostrare che F è sviluppabile in serie di potenze attorno a x_0. Per cominciare rinforziamo le ipotesi supponendo che esista $y_0 \in \mathbb{R}$ tale che l'intorno V su cui la serie di potenze

$$f(x,y) = \sum_{n,m\geq 0} c_{n,m}(x-x_0)^n(y-y_0)^m$$

converge totalmente contenga il rettangolo $U \times [0,1]$, dove $U = [x_0-\delta, x_0+\delta]$, con $\delta > 0$. Facciamo una fuga in avanti e supponiamo che i conti seguenti siano leciti:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^1 f(x,y)\,dy = \int_0^1 \left(\sum_{n,m\geq 0} c_{n,m}(x-x_0)^n(y-y_0)^m \right) dy \overset{?}{=} \\
&\overset{?}{=} \sum_{n,m\geq 0} \int_0^1 c_{n,m}(x-x_0)^n(y-y_0)^m\,dy = \sum_{n,m\geq 0} \frac{c_{n,m}}{m+1}\big((1-y_0)^{m+1} - (-y_0)^{m+1}\big)(x-x_0)^n \overset{?}{=} \\
&\overset{?}{=} \sum_{n\geq 0} \underbrace{\left(\sum_{m\geq 0} \frac{c_{n,m}}{m+1}\big((1-y_0)^{m+1} - (-y_0)^{m+1}\big) \right)}_{=:C_n} (x-x_0)^n = \sum_{n\geq 0} C_n (x-x_0)^n\,.
\end{aligned} \tag{3}$$

Con questa definizione del coefficiente C_n avremmo in effetti che

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} C_n(x-0)^n \qquad \forall x\in U\,,$$

come richiesto. Dobbiamo giustificare tutti i passaggi della formula (3) e assicurarci della convergenza totale in U.

Poniamo

$$f_{n,m}(x,y) := c_{n,m}(x-x_0)^n(y-y_0)^m\,.$$

Dire che la serie $\sum_{n,m\geq 0} f_{n,m}$ converge totalmente su V significa che

$$+\infty > \sum_{n,m\geq 0} \sup_V |f_{n,m}| \geq \sum_{n,m\geq 0} \sup_{(x,y)\in V} \Big| c_{n,m}(x-x_0)^n(y-y_0)^m \Big|\,. \tag{4}$$

Fissato $x \in U$, la serie di funzioni $y \mapsto \sum_{n,m\geq 0} f_{n,m}(x,y)$ converge in $L^1([0,1])$. Infatti

$$\sum_{n,m\geq 0} \|f_{n,m}(x,\,\cdot\,)\|_{L^1([0,1])} = \sum_{n,m\geq 0} \int_0^1 \big|f_{n,m}(x,y)\big|\,dy \leq \sum_{n,m\geq 0} \int_0^1 \Big(\sup_V \big|f_{n,m}\big|\Big) dy \leq \sum_{n,m\geq 0} \sup_V \big|f_{n,m}\big| < +\infty\,.$$

(In generale, una serie che converge totalmente su un insieme di misura finita converge anche in L^1). Quindi possiamo scambiare l'ordine fra serie e integrale in (3): se $x \in U$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^1 f(x,y)\,dx = \int_0^1 \Big(\sum_{n,m\geq 0} f_{n,m}(x,y)\Big) dy = \sum_{n,m\geq 0} \int_0^1 f_{n,m}(x,y)\,dy = \\ &= \sum_{n,m\geq 0} \int_0^1 c_{n,m}(x-x_0)^n(y-y_0)^m\,dy = \sum_{n,m\geq 0} \frac{c_{n,m}}{m+1}\big((1-y_0)^{m+1} - (-y_0)^{m+1}\big)(x-x_0)^n\,. \end{aligned}$$

Infine possiamo riarrangiare l'ultima serie qui sopra e ottenere

$$F(x) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{m\geq 0} \frac{c_{n,m}}{m+1}\big((1-y_0)^{m+1} - (-y_0)^{m+1}\big)\right)(x-x_0)^n\,,$$

perché la convergenza è assoluta. Infatti, usando la (4) e il fatto che $(x_0,0)$ e $(x_0,1) \in V$,

$$\begin{aligned} &\sum_{n,m\geq 0} \left| \frac{c_{n,m}}{m+1}\big((1-y_0)^{m+1} - (-y_0)^{m+1}\big)(x-x_0)^n \right| \leq \\ &\leq \sum_{n,m\geq 0} \Big| c_{n,m}(x-x_0)^n(1-y_0)^m \Big| \cdot \frac{|1-y_0|}{m+1} + \sum_{n,m\geq 0} \Big| c_{n,m}(x-x_0)^n(0-y_0)^m \Big| \cdot \frac{|0-y_0|}{m+1} \leq \\ &\leq 2\max\{|1-y_0|, |y_0|\} \sum_{n,m\geq 0} \sup_{(x,y)\in V} \Big| c_{n,m}(x-x_0)^n(y-y_0)^m \Big| < +\infty\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Quindi, se poniamo, come anticipato,

$$C_n := \sum_{m\geq 0} \frac{c_{n,m}}{m+1}\big((1-y_0)^{m+1} - (-y_0)^{m+1}\big)\,,$$

abbiamo che

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} C_n(x-x_0)^n \qquad \forall x \in U\,,$$

e la convergenza è totale su U con un conto praticamente identico alla (5):

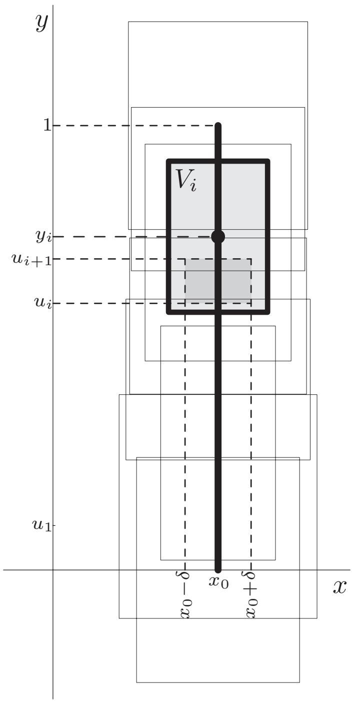
$$\begin{aligned} &\sum_{n\geq 0} \sup_{x\in U} \big|C_n(x-x_0)^n\big| \leq \sum_{n\geq 0} \sup_{x\in U} \left| \sum_{m\geq 0} \frac{c_{n,m}}{m+1}\big((1-y_0)^{m+1} - (-y_0)^{m+1}\big)(x-x_0)^n \right| \leq \\ &\leq \sum_{n,m\geq 0} \sup_{x\in U} \Big| c_{n,m}(x-x_0)^n(1-y_0)^m \Big| \cdot \frac{|1-y_0|}{m+1} + \sum_{n,m\geq 0} \sup_{x\in U} \Big| c_{n,m}(x-x_0)^n(0-y_0)^m \Big| \cdot \frac{|0-y_0|}{m+1} \leq \\ &\leq 2\max\{|1-y_0|, |y_0|\} \sum_{n,m\geq 0} \sup_{(x,y)\in V} \Big| c_{n,m}(x-x_0)^n(y-y_0)^m \Big| < +\infty\,. \end{aligned}$$

Quindi F è sviluppabile in serie di potenze attorno a x_0.

Passiamo al caso generale. L'idea è di spezzare l'integrale da 0 a 1 in una somma di un numero finito di integrali su intervalli abbastanza piccoli da essere contenuti ciascuno in un insieme di convergenza delle serie di potenze. A tale scopo si è tentati di usare la compattezza del segmento $\{x_0\} \times [0,1]$. Però qui vogliamo una *suddivisione* in un numero finito di intervalli non sovrapponentesi, non un semplice ricoprimento aperto. Si può procedere così: sia E l'insieme dei numeri $y > 0$ per i quali esiste una struttura come segue: una suddivisione $0 = u_0 < u_1 < \ldots < u_k = y$ dell'intervallo $[0, y]$, dei punti $y_0, \ldots y_k \in \mathbb{R}$ tali che, se indichiamo con V_i l'insieme di convergenza totale della serie di potenze di f centrata in (x_0, y_i), si abbia che

$$\{x_0\} \times [u_i, u_{i+1}] \subseteq V_i \qquad \forall i = 0, \ldots, k-1\,.$$

Se dimostriamo che E è non vuoto, aperto e chiuso nella topologia dell'insieme connesso $]0, +\infty[$ avremo che $E =]0, +\infty[$ e quindi in particolare che $1 \in E$.
E è non vuoto. Infatti f è sviluppabile in serie di potenze attorno a $(x_0, 0)$, con convergenza totale su V; se $y > 0$ è tale che il segmento $\{x_0\} \times [0, y]$ è contenuto in V, basta prendere la struttura con $k = 1$, $u_1 = y$, $y_1 = 0$, $V_1 = V$. Quindi $y \in E$.
E è aperto e chiuso. Sia infatti $y_n \in E$ una successione che converge a $y \in]0, +\infty[$. Vogliamo dimostrare che y è interno a E. La f è sviluppabile in serie di potenze attorno a (x_0, y), con convergenza totale su V. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $\{x_0\} \times [y-\varepsilon, y+\varepsilon] \subset V$. Sia n_0 tale che $|y_{n_0} - y| < \varepsilon$, e sia u_i, y_i, V_i per $i = 0, \ldots, k$ la struttura associata a y_{n_0}. Associamo a y la seguente variante della struttura di y_{n_0}: se $u_{i_0} < y < u_{i_0+1}$ poniamo semplicemente $k' := i_0 + 1$, $u_{i_0+1} := y$, con gli stessi V_i. Se invece $u_k = y_{n_0} < y$, poniamo $k' := k + 1$, $u_{k'} := y$, $V_{k'} := V$. Si vede che in entrambi i casi risulta $y \in E$.



Sapendo ora che $1 \in E$, sia u_i, y_i, V_i per $i = 1, \ldots, k$ la struttura associata. Sia $\delta > 0$ tale che $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [u_i, u_{i+1}] \subset V_i$ per ogni i (vedi la figura qui accanto, nella quale gli intorni V_i sono rettangolari). Possiamo spezzare l'integrale su $[0,1]$ nella somma degli integrali sui segmenti $[u_i, u_{i+1}]$: posto

$$F_i(x) := \int_{u_i}^{u_{i+1}} f(x, y)\, dy\,,$$

abbiamo che

$$F = F_0 + \cdots + F_{k-1}\,.$$

Con un cambio di variabili affine $y = u_i + (u_{i+1} - u_i)t$ ci riportiamo a un integrale su $[0,1]$:

$$F_i(x) = (u_{i+1} - u_i) \int_0^1 f\big(x, u_i + (u_{i+1} - u_i)t\big) dt\,.$$

Poniamo

$$\varphi_i(x,t) := \big(x, u_i + (u_{i+1} - u_i)t\big)\,, \qquad g_i := f \circ \varphi_i\,.$$

Per il punto **a**, la g_i è sviluppabile in serie di potenze attorno a $\varphi_i^{-1}(x_0, y_i)$ con convergenza totale su

$$\varphi_i^{-1}(V_i) \supseteq \varphi_i^{-1}\big([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [u_i, u_{i+1}]\big) = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [0,1]\,.$$

Con la g_i siamo precisamente nelle ipotesi del caso speciale che abbiamo dimostrato prima. Concludiamo che per ogni i la F_i è sviluppabile in serie di potenze attorno a x_0, e quindi lo stesso succede per la F. (Combinazione lineare di funzioni sviluppabili attorno a un punto è sviluppabile, con dimostrazione banale).

Approfondimento. Supponiamo che $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sia analitica reale e inoltre $|\partial^n f(x,y)/\partial x^n| \le k_n e^{-y}$ per ogni $y \ge 0$. Ne segue che la funzione $x \mapsto \int_0^{+\infty} f(x,y)\, dy$ è analitica reale? E se $k_n/n!$ è limitato? (Suggerimento: provare per esempio f tale che $\int_0^y f(x,t)\, dt = \exp(-1/(x^2 + e^{-y})) - \exp(-1/(x^2+1))$).