Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 1999/2000

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta dell'11 luglio 2000

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento di identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Sia X lo spazio vettoriale delle funzioni $[0,1] \to \mathbb{R}$ limitate, dotato della norma $\|f\| := \sup|f|$.

a. Se $\delta > 0$ la funzione φ_δ definita come

$$\varphi_\delta(f) := \sup_{|x-y|<\delta} \bigl|f(x) - f(y)\bigr| \qquad \text{per } f \in X$$

è continua da X in $\mathbb{R}$.

b. Dimostrare che l'insieme delle funzioni (uniformemente) continue da $[0,1]$ in $\mathbb{R}$ è un sottinsieme boreliano di X.

2. Studiare continuità e derivabilità della funzione

$$F(x) := \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(t^x)\, dt\,.$$

Dire per quali valori di $x \geq 0$ ha senso e vale la relazione

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(2nx+1)}{(2n)!}\,,$$

dove Γ è la funzione Gamma di Eulero-Legendre.
(La derivabilità per $x < 0$ si può studiare per esempio considerando $G(y) := F(-1/y)$ per $y < 0$ e cambiando variabile $y = t^{-1/y}$; la serie si trova espandendo il coseno in serie di Taylor).

Punti: 10+10, 25.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta dell'11 luglio 2000

Svolgimento

1. a. Sia X lo spazio vettoriale delle funzioni $[0,1] \to \mathbb{R}$ limitate, dotato della norma $\|f\| := \sup|f|$. Per $\delta > 0$ definiamo la funzione φ_δ come

$$\varphi_\delta(f) := \sup_{|x-y|<\delta} \big|f(x) - f(y)\big| \qquad \text{per } f \in X$$

Dobbiamo dimostrare che φ_δ è continua da X in $\mathbb{R}$. Innanzitutto notiamo che φ_δ è a valori finiti ≥ 0 per la definizione di X. Siano poi $f, g \in X$ e cerchiamo di valutare $|\varphi_\delta(f) - \varphi_\delta(g)|$. Dalla disuguaglianza triangolare

$$\big|f(x) - f(y)\big| \leq \underbrace{\big|f(x) - g(x)\big|}_{\leq \|f-g\|} + \big|g(x) - g(y)\big| + \underbrace{\big|g(y) - f(y)\big|}_{\leq \|f-g\|} \leq \big|g(x) - g(y)\big| + 2\|f - g\| \,.$$

Quindi

$$\varphi_\delta(f) = \sup_{|x-y|<\delta} \big|f(x) - f(y)\big| \leq \sup_{|x-y|<\delta} \big|f(x) - f(y)\big| + 2\|f - g\| = \varphi_\delta(g) + 2\|f - g\| \,,$$

da cui

$$\varphi_\delta(f) - \varphi_\delta(g) \leq 2\|f - g\| \,.$$

Scambiando il ruolo fra f e g e mettendo insieme le disuguaglianze si ottiene infine che

$$\big|\varphi_\delta(f) - \varphi_\delta(g)\big| \leq 2\|f - g\| \qquad \forall f, g \in X \,,$$

che implica la continuità (uniforme) di φ_δ su X.

b. L'insieme U delle funzioni (uniformemente) continue da $[0,1]$ in $\mathbb{R}$ è contenuto in X, perché ogni funzione reale continua su un compatto è limitata. Per la definizione di funzione uniformemente continua,

$$f \in U \quad \iff \quad \Big(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in [0,1] \quad |x - y| < \delta \ \Rightarrow\ \big|f(x) - f(y)\big| \leq \varepsilon\Big) .$$

Si vede che possiamo limitarci a prendere ε, δ reciproci di naturali (non nulli), per cui

$$f \in U \quad \iff \quad \Big(\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall x, y \in [0,1] \quad |x - y| < \frac{1}{m} \ \Rightarrow\ \big|f(x) - f(y)\big| \leq \frac{1}{n}\Big) .$$

In altre parole,

$$f \in U \quad \iff \quad \Big(\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \sup_{|x-y|<1/m} \big|f(x) - f(y)\big| \leq \frac{1}{n}\Big) ,$$

o ancora,

$$f \in U \quad \iff \quad \Big(\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \varphi_{1/m}(f) \leq \frac{1}{n}\Big) ,$$

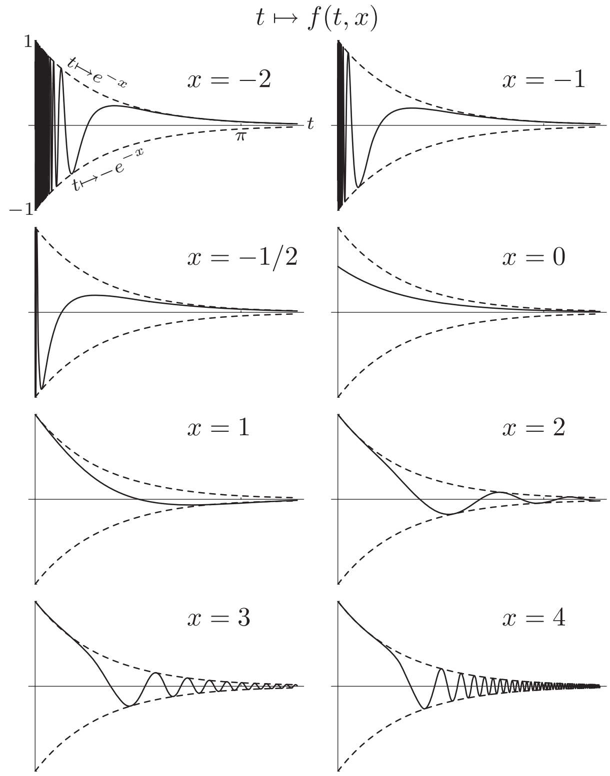
In termini di insiemi:

$$U = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \Big\{f \in X \ : \ \varphi_{1/m}(f) \leq \frac{1}{n}\Big\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \varphi_{1/m}^{-1}\big([0, 1/n]\big) \,.$$

L'insieme $\varphi_{1/m}^{-1}([0, 1/n])$ è chiuso (quindi boreliano) in X perché la $\varphi_{1/m}$ è continua e $[0, 1/n]$ è chiuso in $\mathbb{R}$. L'insieme dei boreliani, in quanto σ-algebra, è stabile per unioni e intersezioni numerabili. Quindi U è boreliano in X.

2. Poniamo

$$f(t,x) := e^{-t}\cos t^x \qquad \text{per } t>0,\ x\in\mathbb{R}\,.$$



Per ogni $x\in\mathbb{R}$ fissato la funzione $t\mapsto f(t,x)$ è ben definita e continua da $]0,+\infty[$ in $\mathbb{R}$, ed è in $L^1(]0,+\infty[)$ perché si può maggiorare in valore assoluto con $t\mapsto e^{-t}$, che ha evidentemente integrale finito su $]0,+\infty[$. Anzi, poiché la maggiorazione

$$\bigl|f(t,x)\bigr| \le e^{-t}$$

è uniforme in x, e dato che la funzione $x\mapsto f(t,x)$ è continua da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ per ogni $t>0$ fissato, grazie al teorema della convergenza dominata concludiamo che la funzione

$$F(x) := \int_0^{+\infty} f(t,x)\,dt$$

è continua da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. La derivata di $f(t,x)$ rispetto a x è

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) &= \frac{\partial}{\partial x} e^{-t}\cos e^{x\ln t} = \\ &= -\,e^{-t}(\operatorname{sen} e^{x\ln t})e^{x\ln t}\ln t = \\ &= -\,e^{-t}t^x(\operatorname{sen} t^x)\ln t\,,\end{aligned}$$

che è pure continua rispetto a x per ogni $t>0$. Una prima maggiorazione, non ancora uniforme in x, è

$$\Bigl|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\Bigr| \le e^{-t}t^x|\ln t|\,.$$

Non ci sono problemi per $t\to+\infty$, mentre ce ne sono per $t\to 0^+$, quando $x\le -1$. Studiamo dapprima il caso $-1+\varepsilon\le x\le M$, con $\varepsilon>0$. Allora

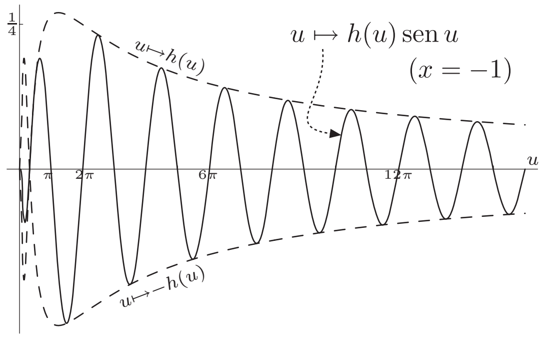
$$-1+\varepsilon \le x\le M \quad\Rightarrow\quad \bigl|e^{-t}t^x\ln t\bigr| \le \begin{cases} e^{-t}t^M|\ln t| & \text{se } t\ge 1,\\ e^{-t}t^{-1+\varepsilon}|\ln t| & \text{se } 0<t<1.\end{cases}$$

L'ultimo membro è una funzione di $L^1(]0,+\infty[)$ perché l'andamento asintotico per $t\to+\infty$ è $e^{-t}t^M|\ln t| = o(e^{-t/2})$ e per $t\to 0^+$ è $e^{-t}t^{-1+\varepsilon}|\ln t| = o(t^{-1+\varepsilon/2})$. Quindi F è di classe C^1 su $[-1+\varepsilon, M]$. Valendo questo per ogni $M>\varepsilon>0$ deduciamo che F è di classe C^1 su $]-1,+\infty[$ e

$$F'(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt = -\int_0^{+\infty} e^{-t}t^x(\operatorname{sen} t^x)\ln t\,dt \qquad \text{per } x>-1\,.$$

I conti precedenti non portano a niente per $x\le -1$, perché in tal caso $e^{-t}t^x|\ln t|$ non ha andamento integrabile per $t\to 0^+$. Non è nemmeno chiaro se $\int_0^{+\infty}\partial f/\partial x\,dt$ abbia senso quando $x\le -1$. Per stabilirlo, proviamo il cambio di variabile $t^x = u$, $t = u^{1/x}$, $dt = (1/x)u^{-1+1/x}du$, con $x<0$:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\Bigl|e^{-t}t^x(\operatorname{sen} t^x)\ln t\Bigr|\,dt &= \int_{+\infty}^0 \Bigl|e^{-u^{1/x}}u(\operatorname{sen} u)(\ln u^{1/x})\Bigr|\cdot\frac{u^{-1+1/x}}{x}du = \\ &= -\,\frac{1}{x\,|x|}\int_0^{+\infty}\underbrace{e^{-u^{1/x}}u^{1/x}\,|\ln u|}_{=|h(u)|}\cdot|\operatorname{sen} u|\;du\,.\end{aligned}$$



Quando $x < 0$ la funzione

$$h(u) := e^{-u^{1/x}} u^{1/x} \ln u$$

è ≥ 0, è asintotica a $u^{1/x} \ln x$ per $x \to +\infty$, e la sua derivata rispetto a u è

$$\frac{\partial h(u)}{\partial u} = \frac{1}{x} e^{-u^{1/x}} u^{1/x-1} \big(x + (1 - u^{1/x}) \ln u \big)\,,$$

che è negativa per ogni u abbastanza grande. Per risultati generali sugli integrali del tipo $\int_0^{+\infty} h(u) \operatorname{sen} u \, du$ con h positiva decrescente, è assodato che

$$\int_0^{+\infty} \Big| e^{-u^{1/x}} u^{1/x} (\operatorname{sen} u)(\ln u) \Big| \, du = +\infty \qquad \text{per } x \leq -1\,,$$

per cui l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\, dt$$

perde di senso per $x \leq -1$. Non è escluso comunque che la F possa essere derivabile anche per $x \leq -1$. Proviamo a definire

$$G(y) := F(-1/y) \qquad \text{per } y > 0\,.$$

La $G(y)$ è derivabile per $y > 0$ se e solo se la $F(x) = G(-1/x)$ è derivabile per $x < 0$. Allora

$$G(y) = \int_0^{+\infty} f(t, -1/y)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos t^{-1/y}\, dt\,.$$

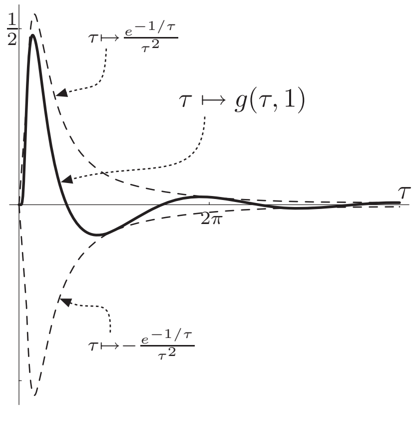
Facciamo il cambio di variabile $t^{-1/y} = \tau$, cioè $t = \tau^{-y}$, $dt = -y\tau^{-y-1} d\tau$:

$$G(y) = \int_{+\infty}^{0} e^{-\tau^{-y}} (\cos \tau)(-y)\tau^{-y-1} d\tau = y \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/\tau^y}}{\tau^{y+1}} \cos \tau \, d\tau\,.$$

L'ultimo integrando

$$g(\tau, y) := \frac{e^{-1/\tau^y}}{\tau^{y+1}} \cos \tau$$

è mostrato nella figura qui accanto per $y = 1$ (che corrisponde a $x = -1$). L'esponente $y + 1$ (che è > 1) al denominatore è quello che ci aggiusta i conti. La $g(\tau, y)$ è una funzione continua e derivabile di y, e per $0 < \varepsilon \leq y \leq M < +\infty$ si maggiora con



$$\big| g(\tau, y) \big| \leq \frac{e^{-1/\tau^y}}{\tau^{y+1}} \leq \begin{cases} \dfrac{e^{-1/\tau^\varepsilon}}{\tau^{M+1}} & \text{per } 0 < \tau \leq 1, \\[2mm] \dfrac{1}{\tau^{\varepsilon+1}} & \text{per } \tau > 1. \end{cases}$$

L'ultimo membro è infinitesimo per $\tau \to 0^+$, come si vede col cambio di variabile $1/\tau^\varepsilon = z$, $\tau = z^{-1/\varepsilon}$:

$$\lim_{\tau \to 0^+} \frac{e^{-1/\tau^\varepsilon}}{\tau^{M+1}} = \lim_{z \to +\infty} \frac{e^{-z}}{z^{-(M+1)/\varepsilon}} = \lim_{z \to +\infty} \frac{z^{(M+1)/\varepsilon}}{e^z} = 0\,,$$

dato che l'esponenziale crescente è infinito di ordine superiore a ogni polinomio. Per $\tau \to +\infty$ l'andamento è $1/\tau^{1+\varepsilon}$, che è integrabile. Dunque G è continua su $[\varepsilon, M]$ per ogni $M > \varepsilon > 0$, e quindi su tutto $]0, +\infty[$, ma questo lo sapevamo già, perché $G(y) = F(-1/x)$, e F è continua. La derivata di $g(\tau, y)$ rispetto a y

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y}(\tau, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \exp\Bigl(-e^{-y\ln\tau} - (y+1)\ln y\Bigr)\cos\tau = \\ &= \Bigl(-e^{-y\ln\tau}(-\ln\tau) - \ln\tau\Bigr)\exp\Bigl(-e^{-y\ln\tau} - (y+1)\ln\tau\Bigr)\cos\tau = \\ &= (\ln\tau)\Bigl(\frac{1}{\tau^y} - 1\Bigr)\frac{e^{-1/\tau^y}}{\tau^{y+1}}\cos\tau\,.\end{aligned}$$

si può maggiorare così, quando $0 < \varepsilon \le y \le M < +\infty$:

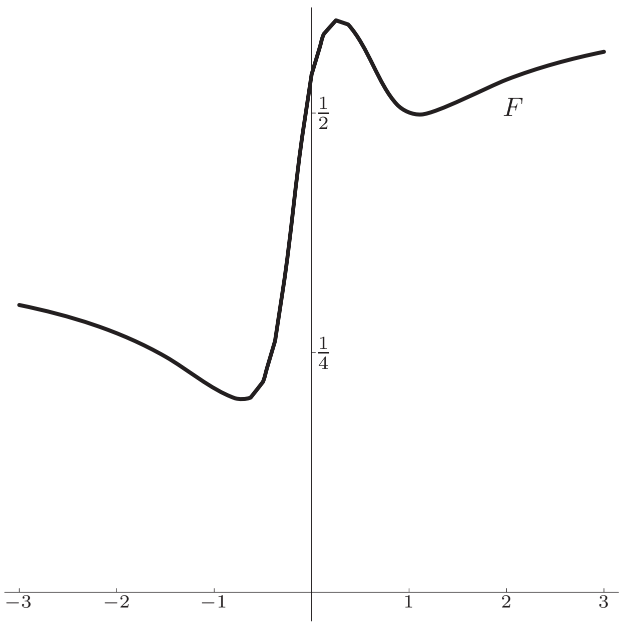
$$\left|(\ln\tau)\Bigl(\frac{1}{\tau^y} - 1\Bigr)\frac{e^{-1/\tau^y}}{\tau^{y+1}}\cos\tau\right| \le |\ln\tau|\left(\frac{1}{\tau^y} + 1\right)\frac{e^{-1/\tau^y}}{\tau^{y+1}} \le \begin{cases} |\ln\tau|\left(\dfrac{1}{\tau^M} + 1\right)\dfrac{e^{-1/\tau^\varepsilon}}{\tau^{M+1}} & \text{per } 0 < \tau \le 1, \\ |\ln\tau|\left(\dfrac{1}{1^\varepsilon} + 1\right)\dfrac{1}{\tau^{\varepsilon+1}} = \dfrac{2|\ln\tau|}{\tau^{\varepsilon+1}} & \text{per } \tau > 1. \end{cases}$$

Grazie al termine esponenziale, la funzione all'ultimo membro è infinitesima per $\tau \to 0^+$, come si vede di nuovo col cambio di variabile $1/\tau^\varepsilon = z$, $\tau = z^{-1/\varepsilon}$:

$$\begin{aligned}\lim_{\tau\to 0^+} |\ln\tau|\left(\frac{1}{\tau^M} + 1\right)\frac{e^{-1/\tau^\varepsilon}}{\tau^{M+1}} &= \lim_{z\to+\infty}\left|\ln z^{-1/\varepsilon}\right|\left(\frac{1}{z^{-M/\varepsilon}} + 1\right)\frac{e^{-z}}{z^{-(M+1)/\varepsilon}} = \\ &= \lim_{z\to+\infty}\frac{|\ln z|\cdot z^{(M+1)/\varepsilon}(z^{M/\varepsilon} + 1)}{\varepsilon e^z} = 0\,.\end{aligned}$$

Per $\tau \to +\infty$ l'andamento asintotico di $2|\ln\tau|/\tau^{\varepsilon+1}$ è $o(1/\tau^{1+\varepsilon/2})$, e quindi è integrabile. Dunque G è di classe C^1 su $[\varepsilon, M]$ per ogni $0 < \varepsilon < M < +\infty$, e quindi su tutto $]0, +\infty[$, e

$$G'(y) = \int_0^{+\infty} g(\tau, y)\,d\tau + y\int_0^{+\infty}\frac{\partial g}{\partial y}(\tau, y)\,d\tau\,.$$



Di conseguenza F è di classe C^1 su $]-\infty, 0[$ e

$$\begin{aligned}F'(x) &= \frac{G'(-1/x)}{x^2} = \\ &= \frac{1}{x^2}\biggl(\int_0^{+\infty}\frac{e^{-1/\tau^{-1/x}}}{\tau^{1-1/x}}\cos\tau\,d\tau - \\ &\quad -\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}(\ln\tau)\Bigl(\frac{1}{\tau^{-1/x}} - 1\Bigr)\frac{e^{-1/\tau^{-1/x}}}{\tau^{1-1/x}}\cos\tau\,d\tau\biggr) \quad \text{per } x < 0\,.\end{aligned}$$

Due valori di F che si calcolano elementarmente sono $F(0) = \cos 1$ e $F(1) = 1/2$. Il grafico di F qui accanto è stato costruito al calcolatore per via simbolica e confermato con integrazioni numeriche: nessuno dei due metodi è garantito completamente da errori, ma il fatto che i risultati concordino con molte cifre decimali lascia abbastanza tranquilli che la F ha proprio questo andamento. Contrariamente a quanto potrebbe sembrare ad occhio, $x = 1$ non è un punto di minimo per $0 \le x \le 3$, perché $F(9/8) < F(1)$. Non è chiaro il comportamento di $F(x)$ per $x \to \pm\infty$, perché l'integrando $f(t, x)$ non ha limite per $x \to +\infty$ quando $t > 1$, e non ha limite per $x \to -\infty$ quando $0 < t < 1$.

Espandiamo il coseno in serie di Taylor:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos t^x \, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(t^x)^{2n}}{(2n)!} \right) dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2nx} e^{-t} \, dt \, .$$

La serie non è a termini positivi. Per vedere se si può scambiare l'ordine fra integrale e somma, calcoliamo la somma delle norme in L^1 degli addendi:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2nx} e^{-t} \right| dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} t^{2nx} e^{-t} \, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t^x)^{2n}}{(2n)!} \right) dt =$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-t} \cosh t^x \, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{e^{t^x} + e^{-t^x}}{2} \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(e^{t^x - t} + e^{-t^x - t} \right) dt$$

Quando $x \geq 0$ L'ultimo integrando $e^{t^x - t} + e^{-t^x - t}$ ha limite finito per $t \to 0^+$, e l'andamento asintotico per $t \to +\infty$ è integrabile quando $0 \leq x < 1$, e non integrabile quando $x \geq 1$. Pertanto quando $0 \leq x < 1$ si può scambiare l'ordine fra somma e integrale e ottenere, usando la funzione Gamma:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2nx} e^{-t} \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^{+\infty} t^{2nx} e^{-t} \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \Gamma(2nx+1) \quad \forall x \in [0, 1[\, .$$

Se $x \geq 1$ non si può applicare il teorema di integrazione per serie. Questo da solo non permette di dedurre che l'uguaglianza

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(2nx+1)}{(2n)!}$$

non possa valere lo stesso. Però quando $x \geq 1$ si ha che $2nx+1 \geq 2n+1$ e quindi, usando il fatto che Γ è crescente su $[2, +\infty[$ e che $\Gamma(k+1) = k!$ per $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\Gamma(2nx+1)}{(2n)!} \geq \frac{\Gamma(2n+1)}{(2n)!} = \frac{(2n)!}{(2n)!} = 1 \qquad \forall x \geq 1, \ n \geq 1.$$

Dunque quando $x \geq 1$ la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(2nx+1)}{(2n)!}$$

non converge, perché il termine generale non è infinitesimo. Concludiamo che quando $x \geq 1$ non ha senso l'uguaglianza

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(2nx+1)}{(2n)!} \, .$$

La figura qui accanto mostra i grafici delle prime somme parziali della serie:

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\Gamma(2kx+1)}{(2k)!} \, .$$