Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1999/2000

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta del 29 maggio 2000

Cognome e Nome:

Matricola: Documento di identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. a. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto in cui ogni aperto è σ-compatto. Sia μ una misura positiva sui boreliani di X finita sui compatti. Sia $f \in L^1(\mu)$ una funzione boreliana a valori reali tale che $\int_V f\,d\mu \geq 0$ per ogni V aperto di X. Dimostrare che $f \geq 0$ μ-quasi ovunque.

(Nelle nostre ipotesi se $E \subset X$ è boreliano esistono V_n aperti contenenti E tali che $\mu(V_n \setminus E) \to 0\ldots$).

b. Sia λ_n la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$, e $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ una funzione a valori reali, tale che per ogni n-upla di intervalli $I_1, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}$ si ha che $\int_{I_1\times\cdots\times I_n} f\,d\lambda_n \geq 0$. Dimostrare che $f \geq 0$ λ_n-quasi ovunque.
(Ogni aperto di $\mathbb{R}^n$ è unione disgiunta di una famiglia numerabile di “scatole” $I_1 \times \cdots \times I_n$).

2. Si rammentano le definizioni delle funzioni Gamma di Eulero-Legendre e zeta di Riemann: $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ per $x > 0$, $\zeta(x) := \sum_{n\geq 1} n^{-x}$ per $x > 1$. Dimostrare che per ogni $x > 1$ si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}\,dt = \Gamma(x)\zeta(x)\,.$$

(Scrivere $1/(e^t - 1) = e^{-t}(1 + e^{-t} + e^{-2t} + \cdots)$).

Punti: 15+10, 15

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta del 29 maggio 2000

Svolgimento

1. a. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto in cui ogni aperto è σ-compatto. Sia μ una misura positiva sui boreliani di X finita sui compatti. Sia $f \in L^1(\mu)$ una funzione boreliana a valori reali tale che $\int_V f\,d\mu \geq 0$ per ogni V aperto di X. Poniamo

$$N := \{x \in X \ :\ f(x) < 0\} = f^{-1}\big(]-\infty, 0[\big)\,.$$

Ovviamente N è boreliano. Si tratta di dimostrare che $\mu(N) = 0$. Per le ipotesi fatte su X e su μ sappiamo che per ogni $n > 0$ esiste un aperto V_n tale che

$$N \subseteq V_n \qquad \text{e} \qquad \mu(V_n \setminus E) < \frac{1}{n}\,.$$

Eventualmente sostituendo V_n con $V'_n := V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n$ (che è ancora aperto, $N \subseteq V'_n \subseteq V_n$, e $\mu(V'_n \setminus N) \leq \mu(V_n \setminus N) < 1/n$) possiamo supporre che la successione V_n sia decrescente. Per l'ipotesi fatta su f abbiamo che

$$\int_{V_n} f\,d\mu \geq 0\,.$$

Spezziamo l'integrale sui due sottinsiemi disgiunti N e $V_n \setminus N$:

$$\int_N f\,d\mu + \int_{V_n \setminus N} f\,d\mu \geq 0\,.$$

L'integrale su $V_n \setminus N$ si può riscrivere come

$$\int_{V_n \setminus N} f\,d\mu = \int_X f \cdot \chi_{V_n \setminus N}\,d\mu\,.$$

La successione di funzioni $n \mapsto f \cdot \chi_{V_n \setminus N}$ tende a 0 quasi ovunque: anzi, è definitivamente zero su tutti i punti di X esclusi quelli di

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \setminus N\,,$$

che è un insieme di misura nulla, in quanto contenuto in $V_n \setminus N$ per ogni n. Inoltre la successione $n \mapsto f \cdot \chi_{V_n \setminus N}$ è dominata da una funzione di $L^1(\mu)$:

$$\big|f \cdot \chi_{V_n \setminus N}\big| \leq |f| \in L^1(\mu) \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Quindi possiamo passare al limite sotto il segno di integrale:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{n\to+\infty} \int_{V_n} f\,d\mu = \lim_{n\to+\infty}\left(\int_N f\,d\mu + \int_{V_n \setminus N} f\,d\mu\right) = \int_N f\,d\mu + \lim_{n\to+\infty}\int_{V_n \setminus N} f\,d\mu = \\
&= \int_N f\,d\mu + \lim_{n\to+\infty}\int_X f \cdot \chi_{V_n \setminus N}\,d\mu = \int_N f\,d\mu + \int_X \lim_{n\to+\infty} f \cdot \chi_{V_n \setminus N}\,d\mu = \int_N f\,d\mu + \int_X 0\,d\mu = \\
&= \int_N f\,d\mu\,.
\end{aligned}$$

Sebbene f sia < 0 su N, il suo integrale su N è ≥ 0. Questo può succedere solo se N ha misura nulla.

b. Sia λ_n la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$, e $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ una funzione a valori reali, tale che per ogni n-upla di intervalli $I_1, \dots, I_n \subset \mathbb{R}$ si ha che $\int_{I_1 \times \cdots \times I_n} f \, d\lambda_n \geq 0$. Dobbiamo dimostrare che $f \geq 0$ quasi ovunque.
Per cominciare possiamo supporre che f sia boreliana, perché ogni funzione misurabile secondo Lebesgue è quasi ovunque uguale a una funzione boreliana, per la quale valgono le stesse ipotesi. Possiamo applicare il punto **a** se riusciamo a dimostrare che f ha integrale ≥ 0 su ogni aperto V. Ma sappiamo che ogni aperto di $\mathbb{R}^n$ è unione di una famiglia numerabile di "scatole" (o parallelepipedi) a due a due disgiunti:

$$V = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k \,, \qquad \text{dove} \quad Q_k = I_{k,1} \times I_{k,2} \times \cdots \times I_{k,n} \,,$$

e gli $I_{k,i}$ sono intervalli, e $Q_{k_1} \cap Q_{k_2} = \varnothing$ se $k_1 \neq k_2$. Poiché i Q_k sono a due a due disgiunti abbiamo che

$$\chi_V = \chi_{\bigcup_k Q_k} = \sum_k \chi_{Q_k} \,.$$

Inoltre, scambiando integrale e somma perché i termini sono positivi:

$$\begin{aligned}\sum_k \|f \cdot \chi_{Q_k}\|_{L^1} &= \sum_k \int_X |f \cdot \chi_{Q_k}| \, d\mu = \sum_k \int_X |f| \, \chi_{Q_k} \, d\mu = \int_X \sum_k |f| \, \chi_{Q_k} \, d\mu = \\ &= \int_X |f| \sum_k \chi_{Q_k} \, d\mu = \int_X |f| \, \chi_{\bigcup Q_k} \, d\mu = \int_X |f| \, \chi_V \, d\mu \leq \int_X |f| \, d\mu = \|f\|_{L^1} < +\infty \,.\end{aligned}$$

Quindi si può scambiare la somma con l'integrale anche nel calcolo seguente:

$$\int_V f \, d\mu = \int_X f \cdot \chi_V \, d\mu = \int_X f \sum_k \chi_{Q_k} \, d\mu = \sum_k \int_X f \chi_{Q_k} \, d\mu = \sum_k \int_{Q_k} f \, d\mu \geq 0 \,.$$

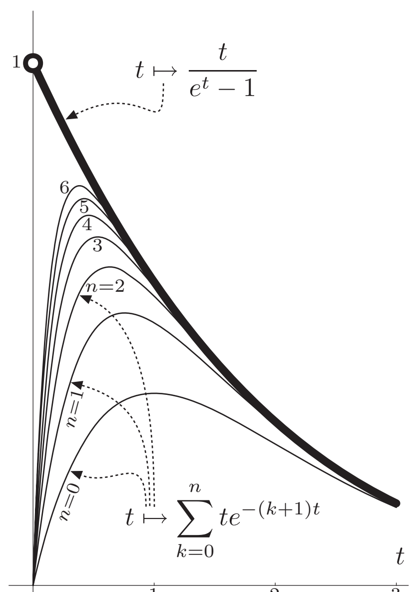
Come desideravamo, f ha integrale ≥ 0 su V.

2. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ la funzione $t \mapsto t^{x-1}/(e^t - 1)$ è continua e positiva su $]0, +\infty[$. L'andamento per $t \to +\infty$ è sempre del tipo $o(e^{-(1-\varepsilon)t})$ per ogni $\varepsilon > 0$, e quindi integrabile. L'andamento per $t \to 0^+$ è asintotico a t^{x-2}, e quindi è integrabile per $x > 1$. Conosciamo la formula della somma di una serie geometrica:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \qquad \forall r \in \,]-1, 1[\,.$$

Applichiamola con $r = e^{-t}$ per $t > 0$:

$$\begin{aligned}\frac{t^{x-1}}{e^t - 1} &= \frac{t^{x-1}}{e^t(1 - e^{-t})} = t^{x-1} e^{-t} \cdot \frac{1}{1 - e^{-t}} = \\ &= 7t^{x-1} e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-t}\right)^n = t^{x-1} e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} t^{x-1} e^{-(n+1)t} \qquad \forall t > 0 \,.\end{aligned}$$



La figura qui accanto mostra un grafico della funzione $t \mapsto t^{x-1}/(e^t - 1)$ assieme alle prime somme parziali della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} t^{x-1} e^{-(n+1)t}$ per $x = 2$. Essendo la serie a termini positivi per $t > 0$, possiamo scambiare la somma con l'integrale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} \, dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} t^{x-1} e^{-(n+1)t} \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-(n+1)t} \, dt \,.$$

Col cambio di variabile $(n+1)t=\tau$ ci riportiamo alla funzione Gamma:

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-(n+1)t}\,dt = \int_0^{+\infty}\Big(\frac{\tau}{n+1}\Big)^{x-1} e^{-\tau}\,\frac{d\tau}{n+1} = \frac{1}{(n+1)^x}\int_0^{+\infty}\tau^{x-1}e^{-\tau}\,d\tau = \\ = \frac{1}{(n+1)^x}\Gamma(x)\,.$$

Quindi

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{e^t-1}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^x}\Gamma(x) = \Big(\frac{1}{1^x}+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\cdots\Big)\Gamma(x) = \\ = \zeta(x)\Gamma(x)\,.$$

L'identità rimane vera anche per $x\le 1$ se si interpreta $\zeta(x)=+\infty$ per quegli x. Di solito però la funzione zeta di Riemann è definita non più come serie, ma per estensione olomorfa, fuori dal semipiano $\{x\in\mathbb{C}\ :\ \Re x>1\}$, ed ha valori finiti per $x<1$.