Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta del 15 febbraio 2000

Cognome e Nome:

Matricola: Documento di identità (se chiesto):

Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Poniamo $\sigma(0) := 0$, $\sigma(n) := 1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$ per $n \geq 1$, $A_0 := \{0\}$, $A_n := \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n \ : \ 0 < a_k < 3^k \ \forall k = 1, \ldots n\}$ per $n > 0$, $A := \bigcup_{n \geq 0} A_n$, $I(0) =]0, 1/3[$,

$$I(a_1, \ldots, a_n) := \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^{\sigma(k)}} + \Big]0, \frac{1}{3^{\sigma(n+1)}}\Big[\quad \text{per } (a_1, \ldots, a_n) \in A_n, \ n \geq 1\,,$$

$V := \bigcup_{a \in A} I(a)$, $C :=]0, 1] \setminus V$. La misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$ è indicata con λ.

a. Dimostrare che per $n \geq 0$

$$\sum_{k=\sigma(n)+1}^{\sigma(n+1)} \frac{2}{3^k} = \frac{3^{n+1}-1}{3^{\sigma(n+1)}}\,, \quad \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{3^{n+1}-1}{3^{\sigma(n+1)}} = \sum_{k=\sigma(N)+1}^{+\infty} \frac{2}{3^k} = \frac{1}{3^{\sigma(N)}}\,.$$

b. Dimostrare che se $a, b \in A$ e $a \neq b$ allora $I(a) \cap I(b) = \varnothing$, e che

$$0 < \lambda(V) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+1}} \Big(1 - \frac{1}{3}\Big)\Big(1 - \frac{1}{3^2}\Big) \cdots \Big(1 - \frac{1}{3^n}\Big) < 1\,.$$

c. Sia B l'insieme delle successioni $b \colon \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ tali che $0 \leq b_n < 3^n$ per ogni n, e $b_n > 0$ per infiniti n. Sia B_0 l'insieme delle $b \in B$ per le quali esistono indici $n < m$ tali che $b_n = 0$ e $b_m < 3^m - 1$. Per $b \in B$ poniamo $\Phi(b) := \sum_{n=1}^{+\infty} b_n / 3^{\sigma(n)}$. Dimostrare che $\Phi \colon B \to]0, 1]$ è biiettiva e che $\Phi(B_0) = V$. Inoltre V è un aperto denso in $]0, 1]$, e tutti i punti di C, escluso un sottinsieme numerabile, sono di accumulazione per C.
(Sfruttare il fatto che per ogni $x \in]0, 1]$ esiste un'unica successione $c \colon \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \{0, 1, 2\}$ tale che $c_n > 0$ per infiniti n e $x = \sum_n c_n / 3^n$).

d. Dimostrare che la funzione caratteristica χ_C non è integrabile secondo Riemann. Anzi, se $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è limitata, a supporto compatto, e coincide con χ_C quasi ovunque secondo Lebesgue, allora nemmeno f è integrabile secondo Riemann.

2. Dimostrare che

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^{+\infty} \frac{n^2 x e^{-n^2 x^2}}{1 + x^2}\, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 0 \text{ o } a < 0, \\ 1/2 & \text{se } a = 0. \end{cases}$$

(Nel caso $a = 0$ cambiare variabile $t = n^2(1 + x^2)$).

Punti: 5+15+15+10, 15

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Istituzioni di Analisi Superiore, primo modulo

Prova Scritta del 15 febbraio 2000

Svolgimento

1. Familiarizziamoci con gli oggetti che dobbiamo manovrare. Cominciamo con σ:

$$\sigma(0)=0,\quad \sigma(1)=1,\quad \sigma(2)=1+2=3,\quad \sigma(3)=1+2+3=6,\quad \sigma(4)=1+2+3+4=10\dots$$

Passiamo ad A:

$$\begin{aligned} &A(0)=\{0\},\quad A(1)=\{(a_1)\ :\ 0<a_1<3^1\}=\{(1),(2)\},\\ &A(2)=\big\{(a_1,a_2)\ :\ 0<a_1<3^1,\ 0<a_2<3^2\big\}=\\ &\quad=\big\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),(1,8),\\ &\qquad(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(2,7),(2,8)\big\}\dots \end{aligned}$$

e poi ad I:

$$\begin{aligned} &I(0)=\,]0,1/3[,\quad I(1)=\frac{1}{3^{\sigma(1)}}+\Big]0,\frac{1}{3^{\sigma(2)}}\Big[=\Big]\frac13,\frac{10}{27}\Big[,\\ &I(2)=\frac{2}{3^{\sigma(1)}}+\Big]0,\frac{1}{3^{\sigma(2)}}\Big[=\Big]\frac23,\frac{19}{27}\Big[,\\ &I(1,1)=\frac{1}{3^{\sigma(1)}}+\frac{1}{3^{\sigma(2)}}+\Big]0,\frac{1}{3^{\sigma(3)}}\Big[=\Big]\frac{10}{27},\frac{271}{729}\Big[,\\ &I(1,2)=\frac{1}{3^{\sigma(1)}}+\frac{2}{3^{\sigma(2)}}+\Big]0,\frac{1}{3^{\sigma(3)}}\Big[=\Big]\frac{11}{27},\frac{298}{729}\Big[,\\ &I(2,1)=\frac{2}{3^{\sigma(1)}}+\frac{1}{3^{\sigma(2)}}+\Big]0,\frac{1}{3^{\sigma(3)}}\Big[=\Big]\frac{19}{27},\frac{514}{729}\Big[,\\ &I(a_1,a_2)=\frac{a_1}{3^{\sigma(1)}}+\frac{a_2}{3^{\sigma(2)}}+\Big]0,\frac{1}{3^{\sigma(3)}}\Big[=\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^3}+\Big]0,\frac{1}{3^6}\Big[. \end{aligned}$$

In generale, prendiamo il k-esimo elemento dell'n-upla $(a_1,\dots,a_n)\in A(n)$. Questo a_k è un intero fra 1 e 3^k-1. Quindi si può scrivere in forma ternaria come

$$a_k=b_{k-1}3^{k-1}+b_{k-2}3^{k-2}+\cdots+b_13^1+b_0,$$

dove $b_i\in\{0,1,2\}$. Allora

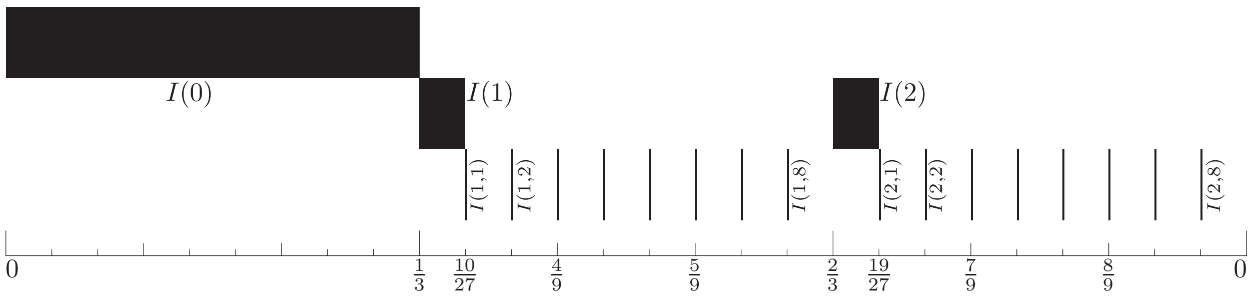
$$\begin{aligned} \frac{a_k}{3^{\sigma(k)}}&=\frac{b_{k-1}3^{k-1}+b_{k-2}3^{k-2}+\cdots+b_13^1+b_0}{3^{\sigma(k)}}=\\ &=\frac{b_{k-1}}{3^{\sigma(k)-k+1}}+\frac{b_{k-2}}{3^{\sigma(k)-k+2}}+\cdots+\frac{b_1}{3^{\sigma(k)-1}}+\frac{b_0}{3^{\sigma(k)}}=\\ &=\frac{b_{k-1}}{3^{\sigma(k-1)+1}}+\frac{b_{k-2}}{3^{\sigma(k-1)+2}}+\cdots+\frac{b_1}{3^{\sigma(k-1)+k-1}}+\frac{b_0}{3^{\sigma(k-1)+k}}. \end{aligned}$$

L'espansione in base 3 del numero $a_k/3^{\sigma(k)}$ è perciò

$$0,\underbrace{000\dots0}_{\sigma(k)}\underbrace{b_{k-1}b_{k-2}\dots b_1b_0}_{k}00000\dots$$

o, meglio ancora, raggruppando le cifre in blocchi di lunghezze successive 1, 2, 3, ecc.

$$0,\underbrace{\underbrace{\underbrace{0}_{1}\underbrace{00}_{2}\underbrace{000}_{3}\underbrace{0000}_{4}\dots\underbrace{000\dots000}_{k-1}}_{\sigma(k-1)}\underbrace{b_{k-1}b_{k-2}\dots b_1b_0}_{k}}_{\sigma(k)}00000\dots$$



La richiesta che $a_k > 0$ si può tradurre dicendo che almeno una delle cifre $b_{k-1}b_{k-2}\dots b_1b_0$ sia diversa da zero. Notare che se $k_1 \neq k_2$ allora le cifre ternarie non nulle di $a_{k_1}/3^{\sigma(k_1)}$ sono tutte in un blocco diverso da quelle di $a_{k_1}/3^{\sigma(k_1)}$.

L'intervallo $I(a_1,\dots,a_n)$ ha come estremo sinistro $\sum_{k=1}^n a_k/3^{\sigma(k)}$, il quale ha espansione ternaria della forma

$$0,\underbrace{\underbrace{x}_{1}\underbrace{xx}_{2}\underbrace{xxx}_{3}\underbrace{xxxx}_{4}\dots\underbrace{xx\dots xxx}_{n}}_{\sigma(n)}00000\dots$$

dove gli x sono cifre fra 0 e 2, e nessuno degli n blocchi è identicamente nullo. L'estremo destro di $I(a_1,\dots,a_n)$ ha forma

$$0,\underbrace{\underbrace{x}_{1}\underbrace{xx}_{2}\underbrace{xxx}_{3}\underbrace{xxxx}_{4}\dots\underbrace{xx\dots xxx}_{n}\underbrace{000\dots0001}_{n+1}}_{\sigma(n+1)}00000\dots$$

L'intervallo è aperto. Quindi $I(a_1,\dots,a_n)$ comprende tutti i punti la cui espansione ternaria ha forma

$$0,\underbrace{\underbrace{x}_{1}\underbrace{xx}_{2}\underbrace{xxx}_{3}\underbrace{xxxx}_{4}\dots\underbrace{xx\dots xxx}_{n}\underbrace{000\dots0000}_{n+1}}_{\sigma(n+1)}xxxxxxxx\dots$$

dove nessuno dei primi n blocchi è identicamente nullo, e le cifre dopo quella di posto $\sigma(n+1)$ non sono tutte 2 e neanche tutte 0. Viceversa, si capisce che tutti i punti di questo tipo stanno in un qualche $I(a)$. Pertanto *sembra che $V := \bigcup_{a\in A} I(a)$ abbia a che fare con l'insieme dei punti di $[0,1[$ la cui espansione in base 3, se suddivisa in blocchi di 1, 2, 3, ecc., cifre consecutive, ha almeno uno dei blocchi identicamente nullo*, non seguito né da 0 periodico né da 2 periodico. I ragionamenti fatti fin qui non sono formali, in quanto glissano sulla questione della doppia rappresentazione ternaria delle frazioni del tipo $n/3^m$.

a. Per dimostrare che

$$\sum_{k=\sigma(n)+1}^{\sigma(n+1)} \frac{2}{3^k} = \frac{3^{n+1}-1}{3^{\sigma(n+1)}},$$

basta usare la formula della somma di termini consecutivi di una progressione geometrica:

$$\begin{aligned}\sum_{k=\sigma(n)+1}^{\sigma(n+1)} \frac{2}{3^k} &= \frac{2}{3^{\sigma(n)+1}} \sum_{j=0}^{\sigma(n+1)-\sigma(n)-1} \frac{1}{3^j} = \frac{2}{3^{\sigma(n)+1}} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{3^j} = \frac{2}{3^{\sigma(n)+1}} \cdot \frac{1-1/3^{n+1}}{1-1/3} = \\ &= \frac{2}{3^{\sigma(n)+1}} \cdot \frac{3^{n+1}-1}{3^{n+1}-3^n} = \frac{2}{3^{\sigma(n)+1}} \cdot \frac{3^{n+1}-1}{3^n(3-1)} = \frac{2}{3^{\sigma(n)+1}} \cdot \frac{3^{n+1}-1}{2\cdot 3^n} = \frac{3^{n+1}-1}{3^{\sigma(n)+n+1}} = \\ &= \frac{3^{n+1}-1}{3^{\sigma(n+1)}}.\end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{3^{n+1}-1}{3^{\sigma(n+1)}} = \sum_{n=N}^{+\infty} \sum_{k=\sigma(n)+1}^{\sigma(n+1)} \frac{2}{3^k} = \sum_{k=\sigma(N)+1}^{+\infty} \frac{2}{3^k} =$$

$$= \frac{2}{3^{\sigma(N)+1}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{3^j} = \frac{2}{3^{\sigma(N)+1}} \cdot \frac{1}{1-1/3} = \frac{2}{3^{\sigma(N)+1}} \cdot \frac{3}{3-1} =$$

$$= \frac{1}{3^{\sigma(N)}}\,.$$

b. Il caso speciale $I(0) =]0, 1/3[$ è disgiunto ovviamente da tutti gli altri $I(a)$.
Siano $a = (a_1, \dots, a_n) \in A(n)$, $b = (b_1, \dots, b_m) \in A(m)$. Supponiamo dapprima che almeno uno degli a_i sia diverso dal corrispondente b_i per un qualche $i \le \min\{n, m\}$, e sia i_0 il primo indice per cui questo succede. Allora

$$I(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^{\sigma(k)}} + \left]0, \frac{1}{3^{\sigma(n+1)}}\right[= \sum_{k=1}^{i_0-1} \frac{a_k}{3^{\sigma(k)}} + \frac{a_{i_0}}{3^{\sigma(i_0)}} + \sum_{k=i_0+1}^{n} \frac{a_k}{3^{\sigma(k)}} + \left]0, \frac{1}{3^{\sigma(n+1)}}\right[\subseteq$$

$$\subseteq \sum_{k=1}^{i_0-1} \frac{a_k}{3^{\sigma(k)}} + \frac{a_{i_0}}{3^{\sigma(i_0)}} + \left] \sum_{k=i_0+1}^{n} \frac{1}{3^{\sigma(k)}}, \sum_{k=i_0+1}^{n} \frac{3^k-1}{3^{\sigma(k)}} \right] + \left]0, \frac{1}{3^{\sigma(n+1)}}\right[\subseteq$$

$$\subseteq \sum_{k=1}^{i_0-1} \frac{a_k}{3^{\sigma(k)}} + \frac{a_{i_0}}{3^{\sigma(i_0)}} + \left]0, \frac{1}{3^{\sigma(i_0)}} - \frac{1}{3^{\sigma(n+1)}}\right] + \left]0, \frac{1}{3^{\sigma(n+1)}}\right[=$$

$$= \sum_{k=1}^{i_0-1} \frac{a_k}{3^{\sigma(k)}} + \frac{a_{i_0}}{3^{\sigma(i_0)}} + \left]0, \frac{1}{3^{\sigma(i_0)}}\right[.$$

e analogamente

$$I(b) \subseteq \sum_{k=1}^{i_0-1} \frac{b_k}{3^{\sigma(k)}} + \frac{b_{i_0}}{3^{\sigma(i_0)}} + \left]0, \frac{1}{3^{\sigma(i_0)}}\right[= \sum_{k=1}^{i_0-1} \frac{a_k}{3^{\sigma(k)}} + \frac{b_{i_0}}{3^{\sigma(i_0)}} + \left]0, \frac{1}{3^{\sigma(i_0)}}\right[.$$

Poiché b_{i_0} e a_{i_0} differiscono almeno di 1, si vede che $I(a)$ non ha punti in comune con $I(b)$.
Supponiamo ora che $n < m$ e che $a_i = b_i$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$. Allora

$$I(b) = \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{3^{\sigma(k)}} + \left]0, \frac{1}{3^{\sigma(m+1)}}\right[= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^{\sigma(k)}} + \sum_{k=n+1}^{m} \frac{b_k}{3^{\sigma(k)}} + \left]0, \frac{1}{3^{\sigma(m+1)}}\right[\subseteq$$

$$\subseteq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^{\sigma(k)}} + \left[\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{3^{\sigma(k)}}, \sum_{k=n+1}^{m} \frac{3^k-1}{3^{\sigma(k)}} \right] + \left]0, \frac{1}{3^{\sigma(m+1)}}\right[\subseteq$$

$$\subseteq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^{\sigma(k)}} + \left[\frac{1}{3^{\sigma(n+1)}}, \frac{1}{3^{\sigma(n)}} \right] + \left]0, \frac{1}{3^{\sigma(m+1)}}\right[\subseteq$$

$$\subseteq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^{\sigma(k)}} + \left] \frac{1}{3^{\sigma(n+1)}}, \frac{1}{3^{\sigma(n+1)}} + \frac{1}{3^{\sigma(n)}} \right[.$$

Ricordandoci che

$$I(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^{\sigma(k)}} + \left]0, \frac{1}{3^{\sigma(n+1)}}\right[,$$

vediamo che anche ora $I(a) \cap I(b) = \varnothing$.
Poiché gli $I(a)$ sono a due a due disgiunti, la misura dell'unione è la somma delle misure:

$$\lambda(V) = \lambda\Big(\bigcup_{a \in A} I(a) \Big) = \sum_{a \in A} \lambda\big(I(a)\big)\,.$$

È chiaro che per ogni $n \geq 0$

$$a \in A(n) \Rightarrow \lambda\big(I(a)\big) = \frac{1}{3^{\sigma(n+1)}}\,.$$

Quindi

$$\lambda(V) = \sum_{n\geq 0} \frac{\#\big(A(n)\big)}{3^{\sigma(n+1)}}\,.$$

Si tratta di calcolare quanti elementi distinti ha $A(n)$. Chiaramente $\#A(0) = 1$. Per $n \geq 1$, $A(n)$ è formato dalle n-uple $(a_1, \ldots, a_n)$ per le quali a_k può essere scelto fra 1 e $3^k - 1$. Quindi

$$\begin{aligned}\#\big(A(n)\big) &= (3^1-1)(3^2-1)\cdots(3^n-1) = 3^{1+2+\cdots+n}\Big(1-\frac{1}{3^1}\Big)\Big(1-\frac{1}{3^2}\Big)\cdots\Big(1-\frac{1}{3^n}\Big) = \\ &= 3^{\sigma(n)}\prod_{k=1}^{n}\Big(1-\frac{1}{3^k}\Big)\,.\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\lambda(V) &= \frac{1}{3} + \sum_{n\geq 1}\frac{3^{\sigma(n)}\prod_{k=1}^{n}\big(1-\frac{1}{3^k}\big)}{3^{\sigma(n+1)}} = \frac{1}{3} + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{3^{\sigma(n+1)-\sigma(n)}}\prod_{k=1}^{n}\Big(1-\frac{1}{3^k}\Big) = \\ &= \frac{1}{3} + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{3^{n+1}}\prod_{k=1}^{n}\Big(1-\frac{1}{3^k}\Big)\,.\end{aligned}$$

È facile vedere che $\lambda(V) < 1$:

$$\lambda(V) < \frac{1}{3} + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{3^{n+1}}\prod_{k=1}^{n} 1 = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{3^n} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-1/3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

La misura di V è certamente > 0 perché V contiene per esempio l'intervallo $]0, 1/3[$. Si può stimare $\lambda(V)$ dal basso con un poca di precisione in più:

$$\begin{aligned}\lambda(V) &> \frac{1}{3} + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{3^{n+1}}\prod_{k=1}^{n}\Big(1-\frac{1}{3^1}\Big) = \\ &= \frac{1}{3} + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{3^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{3^n} = \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sum_{n\geq 1}\Big(\frac{2}{9}\Big)^n = \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2/9}{1-2/9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{7} = \\ &= \frac{7+2}{21} = \frac{9}{21} = 0{,}\overline{428571}\,.\end{aligned}$$

Indicata con V_n l'unione parziale

$$V_n := \bigcup\big\{I(a)\ :\ 0 \leq k \leq n,\ a \in A(k)\big\}\,,$$

si ha che $V_n \nearrow V$, e la misura di V_n è un razionale che si calcola esattamente.

n	$\lambda(V_n)$	appross.
0	$\frac{1}{3}$	0,33333333
1	$\frac{11}{27}$	0,40740741
2	$\frac{313}{729}$	0,42935528
3	$\frac{25769}{59049}$	0,43640028
4	$\frac{6295147}{14348907}$	0,43871962
5	$\frac{4597215923}{10460353203}$	0,43948955
6	$\frac{10059974360881}{22876792454961}$	0,43974584
7	$\frac{66016308599834321}{150094635296999121}$	0,43983123
8	$\frac{129948308049723610504 3}{2954312706550833698643}$	0,43985969
9	$\frac{7673483124990734836427 7707}{17444921100912017907117 0507}$	0,43986918
10	$\frac{1359344286580709625351740 9854729}{3090315438263261236192064 1803529}$	0,43987234

c. Sia B l'insieme delle successioni $b\colon \mathbb{N}\setminus\{0\}\to\mathbb{N}$ tali che $0\le b_n<3^n$ per ogni n, e $b_n>0$ per infiniti n. Sia B_0 il sottinsieme delle $b\in B$ per le quali esistono indici $n<m$ tali che $b_n=0$ e $b_m<3^m-1$. Per $b\in B$ poniamo

$$\Phi(b):=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{3^{\sigma(n)}}\,.$$

Dimostriamo che Φ è iniettiva da B in $\mathbb{R}$. Siano $b,b'\in B$ distinti, e sia n_0 il primo indice per il quale $b_{n_0}\neq b'_{n_0}$, per esempio $b_{n_0}<b'_{n_0}$. Allora

$$\begin{aligned}\Phi(b)&=\sum_{1\le n<n_0}\frac{b_n}{3^{\sigma(n)}}+\frac{b_{n_0}}{3^{\sigma(n_0)}}+\sum_{n>n_0}\frac{b_n}{3^{\sigma(n)}}\le\sum_{1\le n<n_0}\frac{b_n}{3^{\sigma(n)}}+\frac{b_{n_0}}{3^{\sigma(n_0)}}+\sum_{n>n_0}\frac{3^n-1}{3^{\sigma(n)}}=\\&=\sum_{1\le n<n_0}\frac{b_n}{3^{\sigma(n)}}+\frac{b_{n_0}}{3^{\sigma(n_0)}}+\frac{1}{3^{\sigma(n_0)}}=\sum_{1\le n<n_0}\frac{b'_n}{3^{\sigma(n)}}+\frac{b_{n_0}+1}{3^{\sigma(n_0)}}\le\sum_{1\le n\le n_0}\frac{b'_n}{3^{\sigma(n)}}<\\&<\sum_{n\ge1}\frac{b'_n}{3^{\sigma(n)}}=\Phi(b')\,.\end{aligned}$$

L'ultima disuguaglianza è *stretta* perché $b'_n>0$ per infiniti n. Dimostriamo che $\Phi(B)=\,]0,1]$. Sia $x\in\,]0,1]$. Sappiamo che x è espandibile in forma ternaria:

$$x=\sum_{n\ge1}\frac{a_n}{3^n}\,,$$

dove $a_n\in\{0,1,2\}$, e $a_n>0$ per infiniti n. Ripartiamo la somma in blocchi di 1, 2, 3... addendi consecutivi:

$$\begin{aligned}x&=\sum_{n\ge1}\frac{a_n}{3^n}=\sum_{k\ge1}\sum_{n=\sigma(k-1)+1}^{\sigma(k)}\frac{a_n}{3^n}=\sum_{k\ge1}\frac{1}{3^{\sigma(k)}}\sum_{n=\sigma(k-1)+1}^{\sigma(k)}a_n3^{-n+\sigma(k)}=\\&=\sum_{k\ge1}\frac{1}{3^{\sigma(k)}}\sum_{n=\sigma(k-1)+1}^{\sigma(k-1)+k}a_n3^{k-\overbrace{(n-\sigma(k-1))}^{=:j}}=\sum_{k\ge1}\frac{1}{3^{\sigma(k)}}\underbrace{\sum_{j=1}^{k}a_{\sigma(k-1)+j}3^{k-j}}_{=:b_k}=\sum_{k\ge1}\frac{b_k}{3^{\sigma(k)}}=\Phi(b)\,.\end{aligned}$$

La successione b_k definita nell'ultima formula appartiene a B. Infatti $b_k\in\mathbb{N}$ ovviamente,

$$b_k:=\sum_{j=1}^{k}a_{\sigma(k-1)+j}3^{k-j}\le\sum_{j=1}^{k}2\cdot3^{k-j}=2\cdot(3^{k-1}+3^{k-2}+\cdots+3^1+1)=2\cdot\frac{1-3^k}{1-3}=3^k-1\,,$$

e $b_k>0$ per infiniti k perché $a_n>0$ per infiniti n.
Dobbiamo dimostrare ora che $V=\Phi(B_0)$. Sia $x=\Phi(b)$ con $b\in B$. Supponiamo che $b\in B_0$ e dimostriamo che $b\in V$. Sia $n\ge1$ il primo indice tale che $b_n=0$. Allora $(b_1,\dots,b_{n-1})\in A(n-1)$ perché $0<b_k<3^k$ per $1\le k\le n-1$, e inoltre, poiché $b_m<3^m-1$ per almeno un $m>n$,

$$\begin{aligned}x=\Phi(b)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{b_k}{3^{\sigma(k)}}&=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{b_k}{3^{\sigma(k)}}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{b_k}{3^{\sigma(k)}}\in\\&\in\sum_{k=1}^{n-1}\frac{b_k}{3^{\sigma(k)}}+\Big]0,\frac{1}{3^{\sigma(n)}}\Big[=I(b_1,\dots,b_{n-1})\subset V.\end{aligned}$$

Viceversa, supposto $x\in V$ dimostriamo che $b\in B_0$: esiste $a=(a_1,\dots,a_{n-1})\in A(n-1)$ tale che $x\in I(a)$:

$$x\in I(a)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{3^{\sigma(k)}}+\Big]0,\frac{1}{3^{\sigma(n)}}\Big[\,.$$

Quindi $x = y + \sum_{k=1}^{n-1} a_k/3^{\sigma(k)}$ dove $y \in]0, 1/3^{\sigma(n)}[$. Sia $c \in B$ tale che $y = \Phi(c)$. Allora

$$\frac{1}{3^{\sigma(n+1)}} > y = \Phi(c) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_k}{3^{\sigma(k)}} \geq \frac{c_k}{3^{\sigma(k)}} \text{ per ogni } k, \text{ da cui } c_k = 0 \text{ per ogni } k \leq n\,,$$

e poi ancora

$$\frac{1}{3^{\sigma(n)}} > y = \Phi(c) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_k}{3^{\sigma(k)}} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{c_k}{3^{\sigma(k)}}\,, \text{ da cui } c_m < 3^m - 1 \text{ per almeno un } m > n.$$

Se poniamo $d_k := a_k$ per $k < n$ e $d_k := c_k$ per $k \geq n$, abbiamo che

$$x = y + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{3^{\sigma(k)}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_k}{3^{\sigma(k)}} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{3^{\sigma(k)}} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{c_k}{3^{\sigma(k)}} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{3^{\sigma(k)}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d_k}{3^{\sigma(k)}} = \Phi(d)$$

e $d \in B_0$ perché $c_k > 0$ per infiniti k, $d_n = c_n = 0$ e $d_m = c_m < 3^m - 1$, con $n < m$.
È ovvio che V è aperto, in quanto unione di una famiglia di aperti. Per dimostrare che è denso in $]0, 1]$, sia $x \in]0, 1]$ e $\varepsilon > 0$. Sia $b \in B$ tale che $x = \Phi(b)$ e $n \in \mathbb{N}$ tale che $1/3^{\sigma(n)} < \varepsilon$. Poniamo $c_k := b_k$ per $k \leq n$, $c_{n+1} := 0$ e $c_k := 1$ per $k > n + 1$. Allora chiaramente $c \in B_0$, $\Phi(c) \in V$ e

$$\begin{aligned}|x - \Phi(c)| &= |\Phi(b) - \Phi(c)| = \left|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{3^{\sigma(k)}} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_k}{3^{\sigma(k)}}\right| = \left|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k - c_k}{3^{\sigma(k)}}\right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{b_k - c_k}{3^{\sigma(k)}} = \\ &= \frac{b_{n+1} - 0}{3^{\sigma(n+1)}} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{b_k - 1}{3^{\sigma(k)}} < \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{3^k - 1}{3^{\sigma(k)}} = \frac{1}{3^{\sigma(n)}} < \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Rimane da dimostrare che tutti i punti di $C =]0, 1] \setminus V$, escluso un sottinsieme numerabile, sono di accumulazione per C. Sia $x \in C$. Esiste $b \in B \setminus B_0$ tale che $x = \Phi(b)$. Dire che $b \in B \setminus B_0$ significa dire che $0 \leq b_k \leq 3^k - 1$ per ogni k, $b_k > 0$ per infiniti k, e non ci sono coppie di indici $n < m$ per le quali $b_n = 0$ e $b_m < 3^m - 1$. Ci sono due possibilità: o $b_n = 0$ per almeno un n, oppure $b_n > 0$ per ogni n.
Nel primo caso, supponendo che n sia il minimo indice per il quale $b_n = 0$, si ha che $b_k > 0$ per $k < n$, e che $b_k = 3^k - 1$ per ogni $k > n$, cioè, se $n > 1$,

$$\begin{aligned}x = \Phi(b) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{3^{\sigma(k)}} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{3^{\sigma(k)}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{3^k - 1}{3^{\sigma(k)}} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{3^{\sigma(k)}} + \frac{1}{3^{\sigma(n)}} = \\ &= \sup I(b_1, \ldots, b_{n-1}) = \inf I(b_1, \ldots, b_{n-1}, 1)\,;\end{aligned}$$

Se $n = 1$ allora $b_1 = 0$ e $b_k = 3^k - 1$ per ogni $k > 1$, cioè

$$x = \Phi(b) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3^k - 1}{3^{\sigma(k)}} = \frac{1}{3^{\sigma(1)}} = \frac{1}{3} = \sup I(0) = \inf I(1)\,.$$

Dunque se $b_n = 0$ per almeno un n allora x sta a cavallo fra due intervalli di V, e quindi è un punto isolato di C. Di tali x ce ne sono tanti quante le sequenze $(b_1, \ldots, b_{n-1})$ con $0 < b_k < 3^k$ e $n \geq 0$, cioè una quantità numerabile.

Supponiamo di essere nel secondo caso: $b_n > 0$ per ogni n. Dobbiamo dimostrare che x è di accumulazione per C. Sia $\varepsilon > 0$ e sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $1/3^{\sigma(n)} < \varepsilon$. Poniamo $c_k := b_k$ per $k \leq n$ e $c_k = 1$ per $k > n$. Allora $c \in B_0$ evidentemente, e posto $y = \Phi(c)$ si ha che $y \in C$ e che y dista da x meno di ε:

$$|x-y| = \left|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{3^{\sigma(k)}} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_k}{3^{\sigma(k)}}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{b_k - 1}{3^{\sigma(k)}}\right| < \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{3^k - 1}{3^{\sigma(k)}} = \frac{1}{3^{\sigma(n)}} < \varepsilon\,.$$

d. La funzione caratteristica di C vale 1 su C e 0 fuori da C. È quindi limitata e a supporto compatto. Per il teorema di Vitali-Lebesgue χ_C è integrabile secondo Riemann se e solo se l'insieme dei suoi punti di discontinuità ha misura nulla secondo Lebesgue. Ma ogni punto di C è di discontinuità per C: essendo V denso in $]0,1]$, ogni punto $x \in C$ è di accumulazione per V, e quindi esiste una successione $x_n \in V$ tale che $x_n \to x$, di modo che

$$\lim_{n\to+\infty} \chi_C(x_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \neq \chi_C(x) = 1\,.$$

L'insieme dei punti di discontinuità di χ_C non ha misura nulla secondo Lebesgue, perché contiene C. Quindi χ_C non è integrabile secondo Riemann.
Più in generale, sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitata, a supporto compatto, e coincidente con χ_C quasi ovunque secondo Lebesgue. Dobbiamo dimostrare che nemmeno f è integrabile secondo Riemann. Sia $E := \{x \in\,]0,1] : f(x) \neq \chi_C(x)\}$. Sia $x \in C \setminus E$. Allora $f(x) = \chi_C(x) = 1$. D'altra parte, poiché V è aperto denso in $]0,1]$, ogni intorno di x contiene un intervallo non degenere $I(a)$ contenuto in V, non tutti i punti del quale possono stare in E, perché E è trascurabile. Dunque ogni intorno di x ha punti di $V \setminus E$. Sia $x_n \in V \setminus E$ una successione che tende a x. Allora per lo stesso ragionamento di prima $f(x_n) \equiv 0 \to 0 \neq 1 = f(x)$, cioè f è discontinua in x. L'insieme dei punti di discontinuità di f contiene $C \setminus E$, che non è trascurabile. Pertanto f in effetti non è integrabile secondo Riemann.

2. Poniamo

$$f_n(x) := \frac{n^2 x e^{-n^2x^2}}{1+x^2}\,.$$

Poiché $2|x| \leq 1 + x^2$ sempre,

$$\left|f_n(x)\right| \leq n^2 e^{-n^2x^2}\,,$$

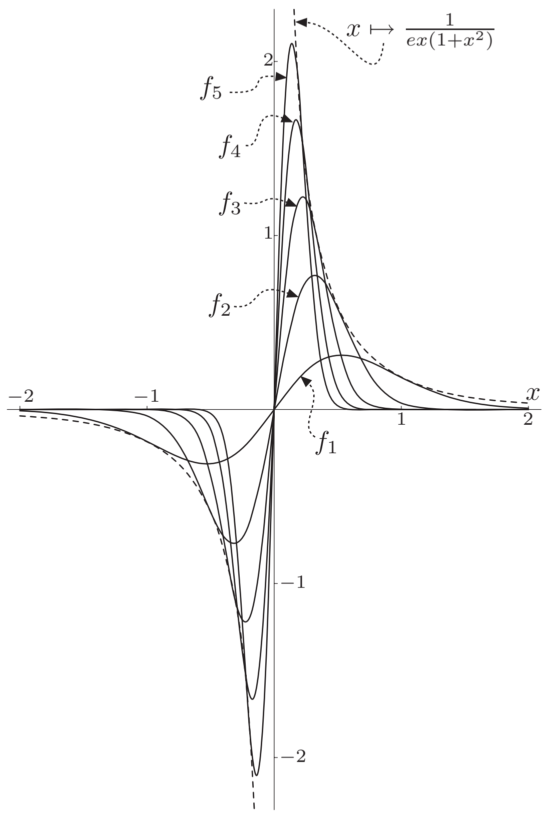
e quindi $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ se $x \neq 0$ perché l'andamento asintotico per $x \to \pm\infty$ è esponenziale decrescente. Per $n = 0$ si ha pure $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ per il motivo più banale che $f_0 \equiv 0$. Pertanto ha senso considerare

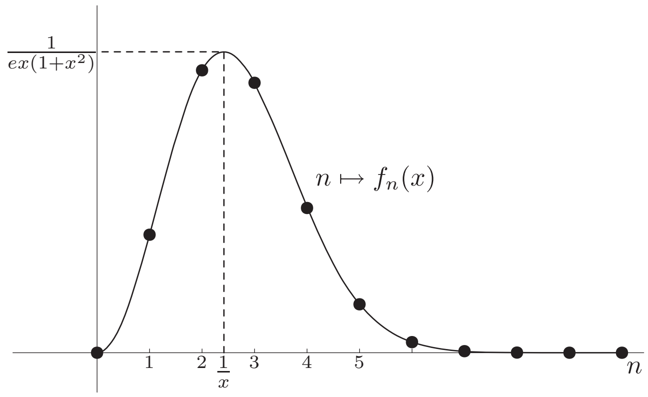
$$I_n(a) := \int_a^{+\infty} f_n(x)\,dx \text{ per qualsiasi } a \in \mathbb{R}\,,$$

e studiarne l'andamento per $n \to +\infty$. La funzione $f_n(x)$ è evidentemente dispari rispetto a x. Quindi se $a < 0$ possiamo scrivere

$$\int_a^{+\infty} f_n(x)\,dx = \underbrace{\int_a^{-a} f_n(x)\,dx}_{=0} + \int_{-a}^{+\infty} f_n(x)\,dx = $$
$$= \int_{-a}^{+\infty} f_n(x)\,dx\,.$$

Insomma, essendo $I_n(a) = I_n(-a)$ ci basta studiare il caso $a \geq 0$.





Vediamo se c'è convergenza puntuale di $f_n(x)$ per $n \to +\infty$. Ovviamente $f_n(0) \equiv 0 \to 0$, mentre se $x \neq 0$ possiamo sostituire $m = n^2$:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{x}{1+x^2} \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{e^{n^2x^2}} = \frac{x}{1+x^2} \lim_{m\to+\infty} \frac{m}{e^{mx^2}} \overset{\substack{\infty/\infty \\ \text{L'Hôpital}}}{=} \frac{x}{1+x^2} \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{x^2e^{mx^2}} = 0\,.$$

Insomma, f_n tende puntualmente a 0 per $n \to +\infty$ su tutto $\mathbb{R}$. Studiamo $f_n(x)$ come funzione della variabile (reale) n:

$$\frac{\partial f_n(x)}{\partial n} = \frac{2nxe^{-n^2x^2} + n^2x\cdot(-2nx^2)e^{-n^2x^2}}{1+x^2} = \frac{2nxe^{-n^2x^2}(1-x^2n^2)}{1+x^2}\,.$$

Se $x > 0$ la funzione $n \mapsto f_n(x)$ risulta crescente nell'intervallo $[-1/x, 1/x]$, e decrescente su $[1/x, +\infty[$. Pertanto

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\bigl|f_n(x)\bigr| \le \sup_{n\in\mathbb{R}}\bigl|f_n(x)\bigr| = f_{1/x}(x) = \frac{\frac{1}{x^2}xe^{-x^2/x^2}}{1+x^2} = \frac{1}{ex(1+x^2)}\,.$$

Quest'ultima funzione è in $L^1([a,+\infty[)$ per $a > 0$, ma non per $a = 0$. Quindi per il teorema della convergenza dominata

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^{+\infty} \Bigl(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\Bigr)dx = \int_a^{+\infty} 0\,dx = 0 \qquad \text{se } a > 0\,.$$

Per studiare il caso $a = 0$ facciamo il cambio di variabile $t = n^2(1+x^2)$, che è un diffeomorfismo fra $x \in]0,+\infty[$ e $t \in]n^2,+\infty[$ con inversa $x = \sqrt{t/n^2 - 1}$, e $dt = 2n^2x$:

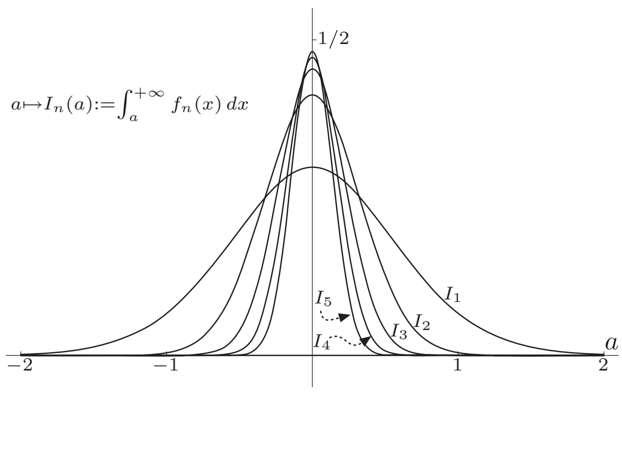
$$I_n(0) = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{n^2xe^{-n^2x^2}}{1+x^2}\,dx = \int_{n^2}^{+\infty} \frac{e^{n^2-t}}{2t/n^2}dt = \frac{n^2e^{n^2}}{2}\int_{n^2}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt\,.$$

Il limite per $n \to +\infty$ di questa espressione si calcola più facilmente ancora con la variabile ausiliaria $m = n^2$:

$$g(m) = I_{\sqrt{m}}(0) = \frac{me^m}{2}\int_m^{+\infty} \frac{1}{te^t}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{\int_m^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt}{e^{-m}/m}\,.$$

L'ultima espressione è della forma $0/0$ quando $m \to +\infty$, e possiamo usare la regola de L'Hôpital e il teorema fondamentale del calcolo:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx &= \lim_{n\to+\infty} I_n(0) = \\
&= \lim_{m\to+\infty} I_{\sqrt{m}}(0) = \\
&= \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{\int_m^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt}{e^{-m}/(2m)} \overset{\substack{0/0 \\ \text{L'Hôpital}}}{=} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{m\to+\infty}\frac{-e^{-m}/m}{-e^{-m}/m - e^{-m}/m^2} = \\
&= \frac{1}{2}\lim_{m\to+\infty}\frac{m}{m+1} = \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$



Questo cambio di variabile $t = n^2(1+x^2)$ si poteva anche usare nel caso $a > 0$, evitando così completamente il teorema della convergenza dominata?